H. Weber и *J. Wellstein*
ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА ВЪ СТРАСБУРГѢ. ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА ВЪ ГИССЕНѢ.

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

РУКОВОДСТВО

для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику.

ВЪ ТРЕХЪ ТОМАХЪ.

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ И СЪ ПРИМѢЧАНІЯМИ

В. КАГАНА

Привать-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета.

ТОМЪ II.

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

КНИГИ II и III.

ТРИГОНОМЕТРІЯ, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ, СТЕРЕОМЕТРІЯ.

MATHESIS

ОДЕССА, 1910.

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ,

СОСТАВИЛИ

Г. Веберъ, I. Вельштейнъ и В. Якобсталь.

Книги II и III.

ТРИГОНОМЕТРІЯ, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ, СТЕРЕОМЕТРІЯ.

СОСТАВИЛИ

Г. Веберъ и В. Якобсталь.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Книга II.

Тригонометрія.

Глава V.

Плоская тригонометрія и полигонометрія.

Составилъ *Г. Веберъ.*

Глава VI.

Геометрія и тригонометрія сферы.

Составилъ *В. Якобсталь.*

A. ОРІЕНТИРОВКА НА СФЕРѢ.

B. ФОРМУЛЫ ПЕРВАГО ПОРЯДКА.

Стр.

Книга III.

Аналитическая геометрія и стереометрія.

Составилъ *Г. Веберъ.*

Глава VII.

Аналитическая геометрія на плоскости.

Глава VIII.

Точки, плоскости и прямыя въ пространствѣ.

Глава IX.

Измѣреніе объема и поверхностей.

Глава X.

Группы вращеній и правильныя тѣла.

Глава XI.

Аналитическая геометрія въ пространствѣ.

Книга II.

ТРИГОНОМЕТРІЯ.

ГЛАВА V.

Плоская тригонометрія и полигонометрія.

---

§ 26. Тригонометрическія функціи. Прямоугольный треугольникъ.

1. Въ планиметріи мы узнали, что между сторонами и углами треугольника имѣется извѣстная зависимость.

Теоремы о конгруэнтности треугольниковъ обнаруживаютъ, что треугольникъ вполнѣ опредѣленъ по формѣ и по величинѣ, если въ немъ даны либо три стороны, либо двѣ стороны и уголъ, между ними заключенный, либо сторона и два прилежащихъ угла. Если даны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ, то треугольникъ этими данными тоже опредѣляется, если не однозначно, то, и не болѣе, чѣмъ двузначно.

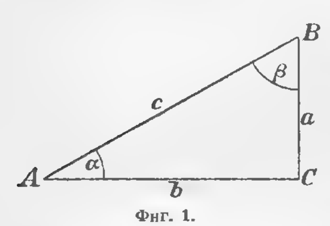
Мы можемъ, такимъ образомъ, сказать, что всякій разъ, какъ изъ шести элементовъ треугольника—трехъ сторонъ и трехъ угловъ—даны какіе-либо три, они опредѣляютъ уже три остальные. Единственное исключеніе отсюда представляютъ три угла, такъ какъ они не независимы другъ отъ друга, а имѣютъ постоянную сумму въ два прямыхъ. Три угла фактически составляютъ, такимъ образомъ, только два данныхъ, а потому ихъ и недостаточно для опредѣленія треугольника. Въ болѣе общей формѣ можно было бы сказать, что всякій разъ, какъ между шестью элементами треугольника даны три какія-либо зависимости, то весь треугольникъ опредѣляется либо однозначно, либо многозначно. На этомъ основываются многочисленныя конструктивныя задачи, въ которыхъ требуется построить треугольникъ по тремъ даннымъ; напримѣръ, по тремъ высотамъ, по радіусамъ вписанной или описанной окружности и т. д.

Если мы хотимъ прослѣдить эти соотношенія аналитически, то нужно замѣтить, что углы и отрѣзки сами по себѣ представляютъ совершенно различныя вещи, измѣряемыя соотвѣтственно различными единицами. Единица въ томъ и въ другомъ случаѣ представляетъ собой совершенно произвольно выбранный объектъ, но однородный съ измѣряемымъ: опредѣленный отрѣзокъ въ одномъ

случаѣ и опредѣленный уголъ въ другомъ случаѣ. Углы и отрѣзки могутъ быть, конечно, выражены числами; но это суть числа различнаго рода, нисколько не связанныя другъ съ другомъ.

Для измѣренія отрѣзковъ повсюду въ наукѣ принята метрическая система, такъ что единицей служитъ метръ или сантиметръ. Углы въ практическихъ примѣненіяхъ измѣряются исключительно градусами, минутами и секундами; при чемъ прямой уголъ дѣлится на 90 равныхъ частей, называемыхъ градусами; гралусъ — на 60 минутъ, минута — на 60 секундъ. Тупой уголъ имѣетъ больше 90 градусовъ, а выпрямленный — 180 градусовъ. Въ послѣднее время возникли стремленія ввести и для угловъ десятичныя дѣленія; именно, дѣлить уголъ на 100 градусовъ, которые и дальше дѣлить десятично. Такое десятичное дѣленіе имѣло бы большое преимущество на практикѣ; однако, по настоящее время тригонометрическія таблицы еще не приспособлены къ этому дѣленію.

2. Если мы желаемъ выразить зависимость между углами и сторонами треугольника при помощи уравненій, то нужно выразить при помощи чиселъ не самые углы, а нѣкоторыя другія величины, зависящія отъ угловъ и находящіяся въ то же время въ извѣстномъ отношеніи къ длинамъ. Эти величины называются тригонометрическими функціями. Значеніе ихъ проще всего выясняется на прямоугольномъ треугольникѣ.



Фиг. 1.

Пусть ABC (фиг. 1) будетъ прямоугольный треугольникъ съ прямымъ угломъ при вершинѣ C; a, b — катеты, c — гипотенуза. Острые углы α и β дополняютъ другъ друга до прямого; каждый изъ нихъ называется дополнительнымъ угломъ по отношенію къ другому.

Отношеніе катета a, противолежащаго углу α, къ гипотенузѣ c называютъ синусомъ угла α и выражаютъ это въ письмѣ коротко такъ:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\cdot$$

Синусъ представляетъ собой, такимъ образомъ, положительное число и при томъ правильную положительную дробь, такъ какъ гипотенуза всегда больше катета.

Отношеніе къ гипотенузѣ катета прилежащаго называется косинусомъ угла α. Пишутъ:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}\cdot$$

Такимъ образомъ косинусъ представляетъ собой правильную положительную дробь.

Отношеніе катета противолежащаго a къ катету прилежащему b называется тангенсомъ угла α, а обратное отношеніе катета прилежащаго къ катету противолежащему называется котангенсомъ угла α. Въ письмѣ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} \cdot$$

Наконецъ, иногда вводятъ еще остальныя два отношенія: гипотенузы къ катету прилежащему и гипотенузы къ катету противолежащему, которыя называются соотвѣтственно секансомъ и косекансомъ угла α; въ обозначеніяхъ:

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} \cdot$$

Такъ какъ тригонометрическія функціи $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ опредѣляются отношеніями сторонъ треугольника, то они не измѣняются, если мы замѣняемъ треугольникъ ABC другимъ, подобнымъ ему треугольникомъ. Но два прямоугольныхъ треугольника всегда подобны, если они имѣютъ общій острый уголъ. Тригонометрическія функціи, поэтому, зависятъ только отъ угла α, а не отъ длины и положенія сторонъ треугольника, въ который входитъ этотъ уголъ.

Значенія четырехъ функцій $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{cotg} \alpha$ даются въ обыкновенныхъ тригонометрическихъ таблицахъ. Функціи $\sec \alpha$ и $\operatorname{cosec} \alpha$, которыя употребляются гораздо рѣже, обыкновенно въ нихъ не приводятся.

Таблицы, большей частью, содержатъ не самыя функціи, а ихъ Бригговы логариѳмы и, именно, для всѣхъ угловъ отъ 0^0 до 90^0, отъ минуты до минуты. Чтобы найти соотвѣтствующія числа для промежуточныхъ угловъ, нужно производить интерполяцію, правила которой всегда указываются во введеніяхъ къ таблицамъ *).

---

*) Происхожденіе и значеніе слова „sinus" не совсѣмъ ясно. Оно пришло къ намъ черезъ посредство арабовъ и извѣстно на западѣ съ XII столѣтія. Слово „cosinus" представляетъ собой сокращеніе термина „complementi sinus" (синусъ дополнительнаго угла: $\cos \alpha = \sin \beta$) и вошло въ употребленіе съ XVII столѣтія. Къ этому, примѣрно, времени относятся и термины „tangens", „secans". Cp. Cantor, „Gesch. d. Mathematik", Bd. I, S. 693; Bd. II, S. 604; v. Braunmühl „Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie". Новое обоснованіе тригонометріи можно найти въ учебникахъ элементарной математики. Мы упомянемъ здѣсь слѣдующее: Hübner, „Ebene und räumliche Geometrie des Masses" (Leipzig, Teubner, 1895); Hessenberg, „Ebene und sphärische Trigonometrie" (Sammlung Göschen) и сборники задачъ, принадлежащіе авторамъ: Reidt, Lieber и Lühmann. Haentzschel, „Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie", Programm des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin.

3. Тригонометрическія функціи связаны различными соотношеніями, которыя легко выводятся изъ ихъ опредѣленій. Прежде всего по теоремѣ Пиѳагора

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

отсюда, принимая во вниманіе опредѣленія синуса и косинуса, получаемъ:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \qquad (1)$$

Поэтому каждое изъ чиселъ $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ можетъ быть выражено черезъ другое:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}. \qquad (2)$$

Далѣе, для остальныхъ четырехъ функцій получаемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \qquad (3)$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}. \qquad (4)$$

Эти соотношенія можно многообразно комбинировать; можно, напримѣръ, каждую изъ шести тригонометрическихъ функцій выразить черезъ одну изъ нихъ; это очень хорошее упражненіе. Такъ, напримѣръ, мы получаемъ:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \qquad (5)$$

Уголъ β въ прямоугольномъ треугольникѣ (фиг. 1) дополняетъ до прямого уголъ α; но, такъ какъ

$$\sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c},$$

то

$$\cos \alpha = \sin \beta, \quad \sin \alpha = \cos \beta, \qquad (6)$$

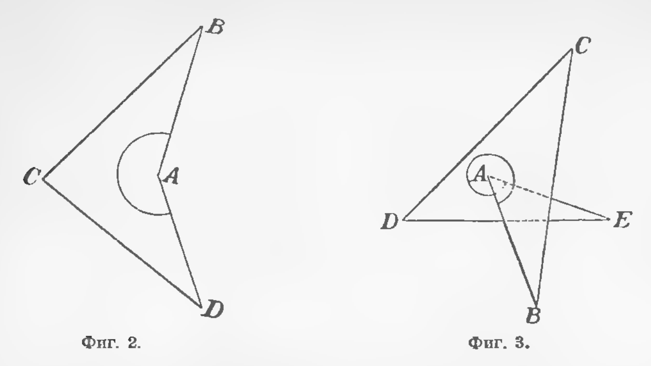
а также

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta, \quad \operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (7)$$

§ 27. Гоніометрія.

1. Такъ какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ, кромѣ прямого угла, могутъ быть только острые углы, то вышеизложеннымъ тригонометрическія функціи опредѣляются только для острыхъ угловъ. Но даже въ треугольникѣ могутъ уже быть и тупые углы; въ четырехугольникѣ (фиг. 2) уголъ уже можетъ быть больше двухъ прямыхъ, въ пятиугольникѣ же можетъ встрѣчаться и такой уголъ, который больше четырехъ прямыхъ, если мы согласимся, какъ это естественно, опредѣлять уголъ въ многоугольникѣ, какъ часть плоскости, расположенной между двумя

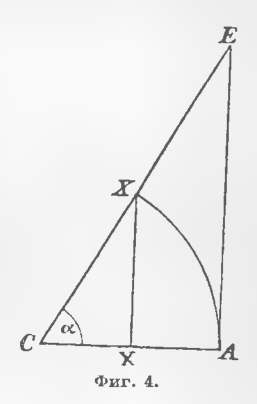
смежными сторонами внутри многоугольника. Но для такихъ угловъ, которые больше четырехъ прямыхъ, необходимо принимать, что часть площади многоугольника расположена **надъ** другою частью, какъ это,



Фиг. 2. Фиг. 3.

напримѣръ, обозначено на фиг. 3 для пятиугольника. Здѣсь уголъ при вершинѣ A больше четырехъ прямыхъ [1]).

Въ виду всего этого представляется необходимымъ опредѣлить тригонометрическія величины не только для тупыхъ и сверхтупыхъ угловъ, но и для угловъ любой вообще величины. Съ этою цѣлью самый уголъ опредѣляется, какъ **мѣра вращенія**, которое совершаетъ лучъ, выходящій изъ неподвижной точки, подобно, напримѣръ, часовой стрѣлкѣ. Мы имѣемъ тогда возможность отмѣтить знакомъ и **направленіе вращенія** вправо или влѣво; вмѣстѣ съ тѣмъ весь неограниченный рядъ чиселъ можетъ служить для выраженія угловъ. Чтобы это выразить нѣсколько точнѣе, возьмемъ окружность и лучъ CE, вращающійся вокругъ ея центра C. Кромѣ того, на окружности выберемъ произвольно нулевую точку A (фиг. 4). Вращеніе луча можно измѣрить тогда угломъ α, который обошелъ вращающійся лучъ, начиная съ положенія CA; этотъ уголъ мы будемъ считать положительнымъ, если для наблюдателя, стоящаго въ точкѣ C, вращеніе происходитъ справа налѣво (въ направленіи, обратномъ часовой стрѣлкѣ), а въ противоположномъ случаѣ отрицательнымъ; по абсолютной величинѣ уголъ α можетъ возрастать неограниченно въ одну и въ другую сторону.



Фиг. 4.

Уголъ измѣряютъ двоякимъ способомъ. Во-первыхъ, можно раздѣлить всю окружность на 360 градусовъ, а затѣмъ, когда точка обойдетъ

[1]) Чтобы понять, въ какомъ смыслѣ уголъ A на фиг. 3 превышаетъ $4A$, нужно себѣ представить что прямая AB приходитъ въ положеніе AE и образуетъ, слѣдовательно, уголъ A, вращаясь вокругъ вершины A и послѣдовательно проходя черезъ вершины C, D, E.

всю окружность, считать градусы дальше 360-ти. Можно также измѣрять уголъ отношеніемъ длины дуги, которую описываетъ на окружности точка ея пересѣченія X съ лучомъ, къ длинѣ радіуса; это отношеніе принимается положительнымъ въ одномъ направленіи и отрицательнымъ въ другомъ направленіи (абсолютная или круговая мѣра угловъ).

Это отношеніе не зависитъ отъ величины радіуса окружности, а также не зависитъ и отъ принятой единицы длины. Если мы за единицу длины примемъ самый раліусъ, то самая длина дуги AX, выраженная въ этой единицѣ, представляетъ собой мѣру угла a. При этой системѣ измѣренія угловъ выпрямленный уголъ (180^0) измѣряется числомъ

$$\pi = 3{,}14159265\ldots,$$

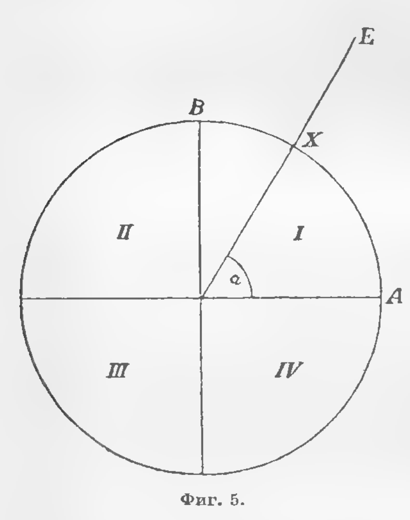
прямой уголъ измѣряется числомъ

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}57079632\ldots$$

и, наконецъ, вся периферія числомъ

$$2\pi = 6{,}28318530\ldots.$$

Единицей угла въ этой системѣ измѣренія служитъ такой уголъ, длина дуги котораго равняется радіусу. Мы получаемъ число градусовъ x для этого угла изъ пропорціи: $x : 180 = 1 : \pi$, которая даетъ уголъ въ $57^0 17' 44{,}8''$.



Фиг. 5.

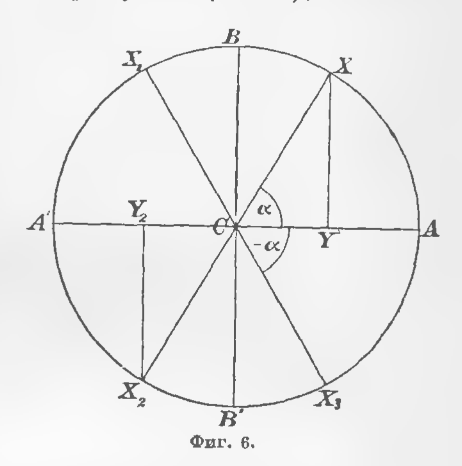
Двумя взаимно перпендикулярными діаметрами мы дѣлимъ кругъ (а ихъ продолженіями и всю плоскость) на 4 части I, II, III, IV, которыя мы будемъ называть квадрантами, или четвертями, и, именно, 1-мъ, 2-мъ, 3-мъ и 4-мъ квадрантомъ (фиг. 5). Мы можемъ также вести счетъ дальше и говорить о 5-мъ, 6-мъ ..., а также о −1-мъ, −2-мъ ... квадрантахъ. Въ такомъ случаѣ 5-ый квадрантъ, напримѣръ, покрывается 1-мъ, а 4-ый квадрантъ   1-мъ. Но при измѣреніи вращенія они различаются между собой *).

2. Углы въ 1-мъ квадрантѣ соотвѣтствуютъ острымъ угламъ въ прямоугольномъ треугольникѣ фиг. 1-ой; если мы, поэтому, изъ точки X опустимъ перпендикуляръ на начальное положеніе радіуса CA, то длина a этого перпендикуляра будетъ равна синусу угла a въ предположеніи,

*) Номеръ квадранта, уменьшенный единицей, выражаетъ число цѣлыхъ единицъ, содержащихся въ углѣ, когда за единицу принимается прямой уголъ.

что мы попрежнему принимаемъ радіусъ за единицу длины. Отрѣзокъ $CY = b$ представляетъ собой косинусъ угла a (фиг. 6).

Условимся теперь считать перпендикуляръ, опущенный на начальный діаметръ AA', положительнымъ, если онъ направленъ вверхъ, и отрицательнымъ, если онъ направленъ внизъ. Точно такъ же перпендикуляръ къ діаметру BB' мы будемъ считать положительнымъ, если онъ направленъ въ сторону точки A (вправо) и отрицательнымъ, если онъ направленъ въ сторону A' (влѣво); вмѣстѣ съ тѣмъ числа, выражающія результатъ измѣренія, мы будемъ снабжать соотвѣтствующими знаками. Послѣ этихъ соглашеній мы будемъ разумѣть подъ синусомъ угла длину перпендикуляра изъ точки X на начальный діаметръ; подъ косинусомъ — отрѣзокъ отъ центра до основанія этого перпендикуляра, или, что то же, длину перпендикуляра изъ точки X на прямую BB'.



Фиг. 6.

Замѣтимъ здѣсь, что тригонометрическія функціи, собственно говоря, представляютъ собой не длины, а отношенія этихъ длинъ къ длинѣ радіуса; но ихъ можно выражать длинами этихъ перпендикуляровъ, что особенно наглядно, если мы выберемъ радіусъ за единицу длины; сообразно этому говорятъ также о синусѣ и косинусѣ, какъ о тригонометрическихъ линіяхъ.

Въ виду установленныхъ соглашеній мы имѣемъ слѣдующее правило знаковъ:

въ	I-мъ	квадрантѣ	синусъ +,	косинусъ	+,
„	II-мъ	„	„ +	„	
„	III-мъ	„	„ -	„	
„	IV-мъ	„	„ −	„	+

какъ это легко видѣть на фиг. 5.

3. Періодичность. Если уголъ a возрастаетъ или убываетъ на цѣлую окружность, то точка X возвращается въ свое первоначальное положеніе. Поэтому синусы и косинусы также получаютъ первоначальныя значенія. При круговой мѣрѣ угловъ это выражается слѣдующими формулами:

$$\sin(a + 2\pi) = \sin a, \quad \cos(a + 2\pi) = \cos a. \tag{1}$$

И вообще:

$$\sin(a + 2k\pi) = \sin a, \quad \cos(a + 2k\pi) = \cos a, \tag{2}$$

гдѣ k произвольное положительное или отрицательное цѣлое число. То свойство тригонометрическихъ величинъ, что онѣ не измѣняются, когда уголъ нарастаетъ на опредѣленную величину, называется періодичностью; величина же 2π, равно какъ и всякое кратное 2π, называется періодомъ. Каждый уголъ можно привести въ одинъ изъ первыхъ четырехъ квадрантовъ, присоединяя надлежаще выбранный періодъ.

4. Если уголъ возрастаетъ или убываетъ на половину окружности, то точка X переходитъ въ діаметрально противоположную точку X_2. Функціи $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по абсолютной величинѣ не мѣняются, но обѣ мѣняютъ свой знакъ (на фиг. 6 треугольники CXY и CX_2Y_2 конгруэнтны). Мы имѣемъ, такимъ образомъ:

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha, \quad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha, \tag{3}$$

каковыя формулы остаются въ силѣ для любого угла α.

Вычитывая π, мы можемъ привести уголъ 3-го и 4-го квадранта къ 1-му или 2-му.

5. Если мы произведемъ вращеніе $AX = \alpha$ въ противоположномъ направленіи, то, каковъ бы ни былъ уголъ α, точка X приходитъ въ положеніе X_3, симметричное съ X относительно AA'. Вслѣдствіе этого, синусъ мѣняетъ свой знакъ, а косинусъ остается безъ измѣненія; вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ для всякаго угла α:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha. \tag{4}$$

Замѣняя же α черезъ $-\alpha$ въ соотношеніи (3), мы, такимъ образомъ, получаемъ:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha. \tag{5}$$

Для двухъ угловъ, дополняющихъ другъ друга до π, синусы равны, косинусы же равны по абсолютной величинѣ, но имѣютъ различные знаки.

6. Мы видѣли уже въ предыдущемъ параграфѣ и убѣждаемся въ этомъ непосредственно на фиг. 6, что синусъ остраго угла α равенъ косинусу дополнительнаго угла; иначе говоря, когда уголъ α лежитъ въ первомъ квадрантѣ, то

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \tag{6}$$

Если же α есть тупой уголъ, то $\alpha' = \pi - \alpha$ есть острый уголъ; поэтому, согласно соотношенію (6), $\cos(\pi - \alpha) = \sin(-\pi/2 + \alpha)$,

или, въ виду соотношеній (4) и (5), опять-таки $\cos\alpha = \sin(\pi/2 - \alpha)$, а также $\sin\alpha = \cos(\pi/2 - \alpha)$. Формулы (6) остаются, такимъ образомъ, въ силѣ и для тупыхъ угловъ. Если уголъ α лежитъ въ 3-мъ или 4-мъ квадрантѣ, то уголъ $\alpha - \pi$ падаетъ въ 1-ый или во 2-й квадранты, а потому и теперь $\cos(\alpha - \pi) = \sin(\pi/2 - \alpha + \pi)$; въ силу же формулъ (3) отсюда опять-таки вытекаетъ соотношеніе (6).

Если, наконецъ, мы увеличимъ или уменьшимъ уголъ α на произвольное кратное 2π, то мы убѣдимся, что соотношеніе (6) справедливо всегда.

Наконецъ, что соотношеніе

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{7}$$

также справедливо при всякомъ углѣ α, можетъ быть такимъ же образомъ выведено изъ того, что оно имѣетъ мѣсто для остраго угла; но и въ общемъ случаѣ оно представляетъ собою не что иное, какъ предложеніе Пиѳагора.

7. Что касается функцій $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$, то ихъ мы въ общемъ случаѣ опредѣляемъ просто формулами:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \end{aligned} \tag{8}$$

Въ виду соотношеній (3) мы тогда получаемъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{cotg}\alpha; \tag{9}$$

Эти двѣ функціи также имѣють, слѣдовательно, періодъ, а именно π или любое кратное π. Онѣ положительны въ 1-мъ и 3-мъ квадрантѣ, отрицательны во 2-мъ и 4-мъ.

Изъ соотношеній (4) и (6) получаемъ:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha. \tag{11}$$

Далѣе, тангенсъ и секансъ можно также представить въ видѣ линій круга съ радіусомъ, равнымъ единицѣ, и изъ этого, именно, изображенія выясняется названіе этихъ функцій.

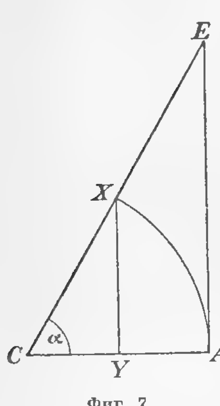
Мы ограничимся первымъ квадрантомъ. Въ точкѣ A проведемъ касательную AE къ окружности (перпендикуляръ къ AC); тогда подобные треугольники CEA и CXY (фиг. 7) даютъ пропорцію:

$$\overline{AE} : \overline{XY} = \overline{AC} : \overline{CY},$$

а такъ какъ $\overline{XY} = \sin a$, $\overline{CY} = \cos a$, $\overline{AC} = 1$, то отсюда слѣдуетъ, что $\overline{AE} = \operatorname{tg} a$.

Далѣе, изъ тѣхъ же треугольниковъ вытекаетъ: $\overline{CE} : \overline{CX} = \overline{CA} : \overline{CY}$, а потому $\overline{CE} = 1/\cos a = \sec a$.

8. Если даны тригонометрическія функціи $\sin a$ и $\cos a$ нѣкотораго угла, то этимъ уголъ a не вполнѣ опредѣляется; напротивъ, уголъ a опредѣляется вполнѣ, если присоединяется еще требованіе, что онъ лежитъ между 0 и 2π. Если дана только одна изъ двухъ функцій, скажемъ, $\sin a$, то и въ этомъ интервалѣ имѣются два угла, именно a и $\pi - a$, удовлетворяющіе этому требованію; когда данъ $\cos a$, то этими углами будутъ a и $2\pi - a$. Поэтому, чтобы уголъ a въ интервалѣ отъ 0 до 2π былъ опредѣленъ однозначно, должны быть даны обѣ функціи; значенія ихъ, впрочемъ, не могутъ быть произвольными, такъ какъ онѣ связаны соотношеніемъ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.



Фиг. 7.

9. Для нѣкоторыхъ отдѣльныхъ угловъ численныя значенія тригонометрическихъ функцій легко опредѣлить. Если $a = 0$, то точка X падаетъ въ точку A; поэтому $a = 0$ и $b = 1$; слѣдовательно:

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Въ виду же формулы (5)

$$\sin \pi = 0, \quad \cos \pi = -1.$$

Пользуясь періодичностью функцій, мы можемъ это обобщить: именно, каково бы ни было цѣлое число k,

$$\sin k\pi = 0, \quad \cos k\pi = (-1)^k, \quad \operatorname{tg} k\pi = 0, \tag{12}$$

т. е. $\cos k\pi = +1$, если k есть четное число, и $\cos k\pi = -1$, если k есть число нечетное. Если a есть прямой уголъ, то точка X падаетъ въ точку B (фиг. 6). Вмѣстѣ съ тѣмъ $a = 1$, $b = 0$; слѣдовательно,

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty; \tag{13}$$

и вообще, если h есть нечетное цѣлое число, то

$$\sin h \frac{\pi}{2} = (-1)^{\frac{h-1}{2}}, \quad \cos h \frac{\pi}{2} = 0,$$

т. е. $\sin h \frac{\pi}{2}$ равняется $+1$ или -1, смотря по тому, имѣетъ ли число h видъ $4n + 1$, или $4n + 3$. Выраженіе $\operatorname{tg} \pi/2 = \infty$ наглядно выясняется

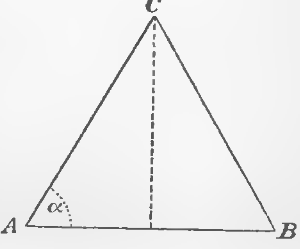
на фигурѣ 7, такъ какъ отрѣзокъ AE неограниченно возрастаетъ, когда лучъ CE, вращаясь, приближается къ положенію, перпендикулярному къ CA.

Для угла α въ 45^0 $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ становятся равными. Общее ихъ значеніе, въ виду формулы (7), равняется $1/\sqrt{2}$, а потому:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Разсмотримъ, наконецъ, уголъ въ 60^0, т. е. уголъ равносторонняго треугольника.

Если мы въ равностороннемъ треугольникѣ, сторона котораго равна единицѣ, проведемъ высоту, то она раздѣлитъ основаніе на двѣ части, каждая изъ которыхъ равна половинѣ. Но каждый изъ этихъ отрѣзковъ представляетъ собой косинусъ угла треугольника; вмѣстѣ съ тѣмъ, принимая во вниманіе соотношеніе (7), мы получаемъ:



Фиг. 8.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Ученіе о свойствахъ тригонометрическихъ функцій угловъ произвольной величины, слѣдовательно, безъ непосредственной связи съ вычисленіемъ треугольниковъ, называется гоніометріей (измѣреніе угловъ).

§ 28. Основныя формулы тригонометріи.

1. Для опредѣленія треугольникя, достаточно, чтобы были даны три его элемента, опредѣляющіе остальные его элементы и вообще все, о чемъ можно спрашивать относительно треугольниковъ: высоты, биссектриссы, радіусы вписанной и описанной окружностей и т. п. Смотря по выбору данныхъ элементовъ, эти опредѣленія окажутся однозначными или многозначными. Но между сторонами и углами треугольника не существуетъ алгебраическихъ соотношеній. Таковыя существуютъ только между сторонами треугольника и тригонометрическими функціями угловъ. Наша ближайшая задача и заключается въ томъ, чтобы установить достаточное число такого рода соотношеній.

2. Теорема синусовъ. Стороны треугольника ABC мы будемъ обозначать черезъ a, b, c, противолежащіе углы черезъ α, β, γ. Если мы опустимъ изъ вершины A перпендикуляръ AD на противоположную сторону, то мы можемъ выразить этотъ перпендикуляръ h_a (высоту треугольника) двумя способами; именно, два прямоугольныхъ треугольника ABD и ACD даютъ:

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta. \tag{1}$$

Эти соотношенія остаются правильными и въ томъ случаѣ, когда треугольникъ ABC имѣетъ тупой уголъ (фиг. 10 и 11). Но то же самое построеніе можно выполнить при каждой изъ трехъ вершинъ; мы, такимъ образомъ, получаемъ также:

$$a \sin\beta = b \sin\alpha, \quad a \sin\gamma = c \sin\alpha.$$

Отсюда получается двойное равенство, которое можно написать въ такой формѣ:

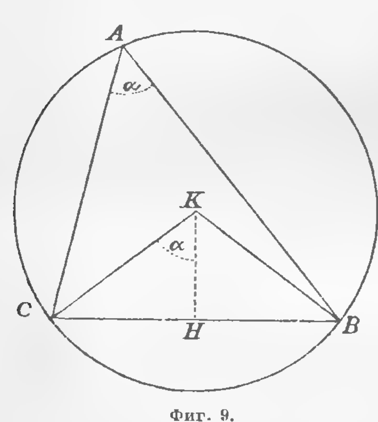
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (2)$$

Это можно въ словахъ выразить слѣдующимъ образомъ:

Въ каждомъ треугольникѣ стороны относятся, какъ синусы противолежащихъ угловъ:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

3. Чтобы найти геометрическій смыслъ общаго значенія трехъ отношеній (2), мы опишемъ около треугольника ABC окружность (фиг. 9); пусть K будетъ центръ и r — радіусъ этой окружности. Въ такомъ случаѣ центральный уголь CKB будетъ вдвое больше соотвѣтствующаго вписаннаго угла $CAB = \alpha$; и, если мы изъ точки K опустимъ перпендикуляръ KH на прямую CB, то треугольники CHK и BHK конгруэнтны. Слѣдовательно, $HKC = \alpha$ и $a/2 = r \sin\alpha$, или $a/\sin\alpha = 2r$. Если мы опустимъ перпендикуляры изъ точки K на остальныя стороны b, c, то мы получимъ для $2r$ также выраженіе $b/\sin\beta$ и $c/\sin\gamma$.



Фиг. 9.

Общее значеніе отношеній (2), такимъ образомъ, есть діаметръ описанной окружности.

4. Теорема косинусовъ. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABD и ACD (фиг. 10) $DB = c \cos\beta$, $DC = b \cos\gamma$ и, такъ какъ сумма этихъ двухъ отрѣзковъ равна a, то

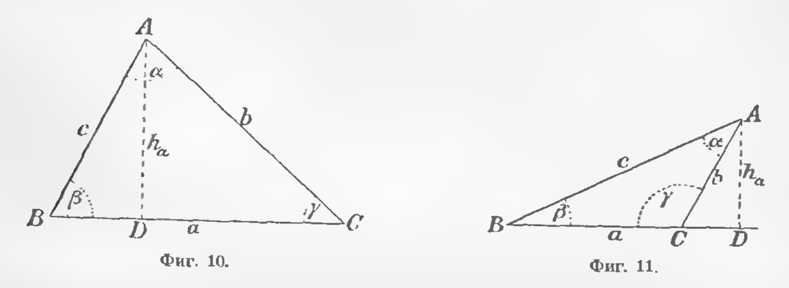
$$a = b \cos\gamma + c \cos\beta;$$

эта формула остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ угловъ, скажемъ γ, тупой: $\cos\gamma$ имѣетъ въ этомъ случаѣ отрицательное значеніе, но вмѣстѣ съ тѣмъ $a = BD - DC$ (фиг. 11).

Таких формул мы опять-таки можем установить три:

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$$
$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma, \qquad (3)$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Съ помощью этихъ трехъ уравненій можемъ опредѣлить $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ по даннымъ сторонамъ a, b, c. Для этой цѣли умножаемъ первое уравненіе на a и вставляемъ значенія произведеній $a\cos\gamma$ и $a\cos\beta$, взятыя изъ послѣднихъ двухъ уравненій. Такимъ образомъ, мы получаемъ:



Фиг. 10.

Фиг. 11.

$$a^2 = b(b - c\cos\alpha) + c(c - b\cos\alpha);$$

сдѣлавъ же соотвѣтствующія вычисленія для $\cos\beta$ и $\cos\gamma$, найдемъ:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta, \qquad (4)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

5. Этимъ основныя задачи тригонометріи въ принципѣ разрѣшены:

1. Если даны стороны a, b, c, то мы находимъ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ изъ соотношеній (4); напримѣръ,

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

2. Если даны двѣ стороны b и c и заключенный между ними уголъ α, то изъ соотношеній (4) однимъ извлеченіемъ квадратнаго корня получаемъ:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

3. Если же даны двѣ стороны b и c и прилежащій уголъ β, то для опредѣленія стороны a приходится рѣшить квадратное уравненіе, которое мы получаемъ изъ второго равенства (4). Для опредѣленія же другихъ угловъ лучше всего воспользоваться теоремой синусовъ.

4. Если даны два угла и одна сторона, то тѣмъ самымъ данъ и третій уголъ; вмѣстѣ съ тѣмъ двѣ другія стороны опредѣляются по теоремѣ синусовъ.

6. Теорема сложенія. Такъ какъ каждый изъ трехъ угловъ треугольника опредѣляется двумя другими, то и тригонометрическія величины каждаго угла опредѣляются тригонометрическими величинами двухъ другихъ угловъ. Эти тригонометрическія величины должны, слѣдовательно, быть связаны уравненіями. Первое изъ относящихся сюда соотношеній мы получаемъ изъ уравненій (3). Такъ какъ это суть три однородныхъ линейныхъ уравненія относительно a, b, c, то опредѣлитель системы долженъ быть равенъ нулю (см. т. I, § 41, 2):

$$\begin{vmatrix} -1, & \cos\gamma, & \cos\beta \\ \cos\gamma, & -1, & \cos\alpha \\ \cos\beta, & \cos\alpha, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или въ раскрытомъ видѣ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1. \qquad (5)$$

Подставляя же сюда $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, получаемъ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = 1. \qquad (6)$$

Однако, это не простѣйшее соотношеніе между этими величинами. Отсюда, напримѣръ, можно получить $\cos\alpha$, только рѣшая квадратное уравненіе, и тогда нужно было бы еще установить, который изъ двухъ корней слѣдуетъ взять. Болѣе простыя формулы мы получаемъ слѣдующимъ образомъ.

По теоремѣ синусовъ мы можемъ замѣнить въ формулахъ (3) стороны a, b, c черезъ $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, и такимъ образомъ мы получаемъ:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta, \\ \sin\beta &= \sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\cos\gamma, \\ \sin\gamma &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (7)$$

Этимъ, прежде всего, $\sin\gamma$ выражается однозначно въ тригонометрическихъ функціяхъ угловъ α и β. Если же мы имѣемъ $\sin\gamma$, то можно опредѣлить $\cos\gamma$ изъ уравненій (7), именно:

$$\begin{aligned} \sin\alpha\cos\gamma &= \sin\beta - \cos\alpha(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\ &= -\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta(1 - \cos^2\alpha) \\ &= -\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin^2\alpha, \end{aligned}$$

Дѣля же обѣ части равенства на $\sin\alpha$, получаемъ:

$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta. \tag{8}$$

Такимъ образомъ, и $\cos\gamma$ опредѣляется однозначно; аналогичныя двѣ формулы можно вывести, если сдѣлать круговыя перестановки угловъ α, β, γ.

Что соотношенiе (6) вытекаетъ изъ уравненiй (7) и (8), можно обнаружить простымъ вычисленiемъ.

§ 29. Гонiометрическiя формулы.

1. Прежде, чѣмъ пойдемъ дальше въ примѣненiи тригонометрическихъ формулъ къ рѣшенiю треугольниковъ, мы воспользуемся послѣдними результатами для пополненiя гонiометрическихъ формулъ.

Именно, если мы положимъ $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ и замѣтимъ, что, въ силу соотношенiя (5) § 27-го, $\sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta)$, то формулы (7) и (8) предыдущихъ параграфовъ дадутъ:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти формулы выражаютъ такъ называемую *теорему сложенiя* синуса и косинуса.

2. Эти формулы покамѣстъ доказаны только въ предположенiи, что какъ углы α и β, такъ и ихъ сумма содержатся въ предѣлахъ между 0 и π; однако, съ помощью предложенiй § 27 ихъ легко обобщить.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ сначала, что α и β суть положительные углы, меньшiе π, но что сумма ихъ $\alpha + \beta$ больше π; полагая тогда $\alpha' = \pi - \alpha$, $\beta' = \pi - \beta$, мы будемъ имѣть $\alpha' + \beta' = 2\pi - \alpha - \beta < \pi$; вслѣдствiе этого для угловъ α' и β' условiя, при которыхъ формулы (1) доказаны, удовлетворены. Слѣдовательно,

$$\sin(2\pi - \alpha - \beta) = \sin(\pi - \alpha)\cos(\pi - \beta) + \cos(\pi - \alpha)\sin(\pi - \beta),$$

что на основанiи соотношенiя (5) § 27-го можно написать такъ:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

совершенно такъ же мы получаемъ вторую изъ формулъ (1), которая, такимъ образомъ, справедлива дла всѣхъ положительныхъ угловъ α и β, меньшихъ π. Если теперь α есть совершенно произвольный уголъ, то мы всегда имѣемъ возможность выбрать цѣлое число k такимъ образомъ, чтобы $\alpha + k\pi$ заключалось между 0 и π; слѣдовательно, для любого α

$$\sin(\alpha + \beta + k\pi) = \sin(\alpha + k\pi)\cos\beta + \cos(\alpha + k\pi)\sin\beta,$$

откуда, при помощи соотношеній (2) и (3) § 27-го, мы вновь выводимъ первую формулу (1); такимъ же образомъ выводится и вторая. Такъ же мы можемъ поступить и съ угломъ β; такимъ образомъ, формулы (1) доказаны для любыхъ (положительныхъ и отрицательныхъ) угловъ α и β. Мы получимъ, поэтому, только другую форму тѣхъ же уравненій, если замѣнимъ β черезъ $-\beta$ и такимъ образомъ найдемъ:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned} \qquad (2)$$

3. Если мы раздѣлимъ другъ на друга формулы (1), то получимъ теоремы сложенія для тангенсовъ и котангенсовъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \\ \operatorname{cotg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Приведемъ еще нѣсколько гоніометрическихъ формулъ, которыя непосредственно вытекаютъ изъ теоремы сложенія и очень часто примѣняются.

Складывая и вычитая соотношенія (1) и (2), мы получаемъ:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta, \\ \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) &= -2\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned} \qquad (4)$$

Если мы положимъ $\alpha+\beta=a$, $\alpha-\beta=b$, то получимъ:

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b &= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}, \\ \sin a - \sin b &= 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}, \\ \cos a + \cos b &= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}, \\ \cos a - \cos b &= -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}. \end{aligned} \qquad (5)$$

4. Если въ формулахъ сложенія мы положимъ $\alpha=\beta$, то получимъ такъ называемыя формулы удвоенія угла:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \end{aligned} \qquad (6)$$

изъ которыхъ послѣдняя можетъ быть представлена также въ любомъ изъ двухъ видовъ:

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a. \qquad (7)$$

Если здѣсь замѣнить a черезъ $a/2$, то получимъ:

$$1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2},$$
$$1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{a}{2}, \qquad (8)$$
$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}.$$

Изъ первыхъ двухъ уравненій (5), умножая ихъ на $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ и $\sin\frac{1}{2}(a+b)$, въ виду соотношеній (8) получаемъ:

$$\cos\frac{a+b}{2}(\sin a + \sin b) = \sin(a+b)\cos\frac{a-b}{2},$$
$$\sin\frac{a+b}{2}(\sin a - \sin b) = \sin(a+b)\sin\frac{a-b}{2}, \qquad (9)$$

а отсюда путемъ дѣленія:

$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}. \qquad (10)$$

Если мы еще воспользуемся формулой

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a},$$

то получимъ изъ соотношеній (6) и (7):

$$\sin 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a},$$
$$\cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a},$$
$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

Какъ видно отсюда, всѣ тригонометрическія функціи могутъ быть выражены чрезъ тангенсъ половиннаго угла. Именно, если мы замѣнимъ a чрезъ $a/2$ и для краткости положимъ

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = t,$$

то получимъ:

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad (11)$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Эти формулы имѣютъ то преимущество, что онѣ свободны отъ радикаловъ, или, какъ говорятъ, раціональны, между тѣмъ какъ выраженія тригонометрическихъ функцій черезъ одну изъ нихъ безъ помощи функцій половиннаго угла всегда содержатъ радикалы.

§ 30. Умноженіе и дѣленіе угла.

1. Формулы (6) и (7) § 29-го выражаютъ синусъ и косинусъ угла 2α черезъ тѣ же функціи самого угла α. Если мы положимъ для сокращенія

$$x = 2\cos\alpha, \qquad (1)$$

то эти формулы можно представить въ видѣ

$$2\cos 2\alpha = x^2 - 2,$$
$$\sin 2\alpha = \sin\alpha \cdot x. \qquad (2)$$

Изъ теоремы сложенія, полагая въ формулахъ (4) § 29-го $\beta = 2\alpha$, получаемъ:

$$\cos 3\alpha = 2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha, \qquad (3)$$

откуда съ помощью соотношеній (2) находимъ:

$$2\cos 3\alpha = x^3 - 3x,$$
$$\sin 3\alpha = \sin\alpha(x^2 - 1). \qquad (4)$$

2. Эти формулы можно обобщить; именно:

$$2\cos n\alpha = A_n(x),$$
$$\sin n\alpha = \sin\alpha\, B_n(x), \qquad (5)$$

гдѣ подъ n мы можемъ разумѣть 2 или 3, а $A_n(x)$ и $B_n(x)$ въ томъ и другомъ случаѣ представляютъ собой цѣлыя функціи отъ x соотвѣтственно степеней n и $n-1$ съ цѣлыми коэффиціентами. Что это законъ общій, нетрудно доказать съ помощью совершенной индукціи.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ формулахъ (4) § 29-го положимъ $\beta = n\alpha$, то мы получимъ:

$$\cos(n+1)\alpha = 2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha,$$
$$\sin(n+1)\alpha = 2\cos\alpha\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha.$$

Подставляя сюда выраженія (5), найдемъ, что

$$\begin{aligned} A_{n+1}(x) &= xA_n(x) - A_{n-1}(x), \\ B_{n+1}(x) &= xB_n(x) - B_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Если мы поэтому будемъ считать уже доказаннымъ, что $A_n(x)$, $A_{n-1}(x)$, $B_n(x)$, $B_{n-1}(x)$ суть цѣлыя функціи перемѣннаго x съ цѣлыми коэффиціентами, то изъ этихъ формулъ то же самое вытекаетъ для $A_{n+1}(x)$ и $B_{n+1}(x)$; и то обстоятельство, что A_n и B_n суть функціи соотвѣтственно степеней n и $n-1$, также вытекаетъ отсюда во всей общности. Наконецъ, отсюда мы заключаемъ, что при четномъ n функція A_n содержитъ только четныя степени x, а функція B_n — только нечетныя. При нечетномъ n дѣло обстоитъ обратно.

Формулы (6) даютъ возможность послѣдовательно вычислять функціи A_n и B_n. Для первыхъ простѣйшихъ случаевъ мы получимъ:

$$\begin{aligned}
A_2 &= x^2 - 2, \\
B_2 &= x \\
\hline
A_3 &= x^3 - 3x, \\
B_3 &= x^2 - 1 \\
\hline
A_4 &= x^4 - 4x^2 + 2, \\
B_4 &= x^3 - 2x \\
\hline
A_5 &= x^5 - 5x^3 + 5x, \\
B_5 &= x^4 - 3x^2 + 1 \\
\hline
A_6 &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2, \\
B_6 &= x^5 - 4x^3 + 3x \\
\hline
A_7 &= x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x, \\
B_7 &= x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Выраженіе тригонометрическихъ функцій кратнаго угла черезъ такія же функціи простого угла называется умноженіемъ угла. Эта задача, такимъ образомъ, формулами (4), (5), (6) и (7) разрѣшена вполнѣ *).

*) Съ помощью совершенной индукціи легко доказать общія формулы:

$$A_n(x) = \sum^{\nu} (-1)^\nu \frac{n(n-\nu-1)!}{\nu!(n-2\nu)!} x^{n-2\nu}, \qquad \left(0 \leq \nu \leq \frac{n}{2}\right),$$
$$B_n(x) = \sum^{\nu} (-1)^\nu \frac{(n-\nu-1)!}{\nu!(n-2\nu-1)!} x^{n-2\nu-1}, \qquad \left(0 \leq \nu \leq \frac{n-1}{2}\right).$$

3. Обратную задачу представляетъ собой дѣленіе угла. Подъ этимъ мы разумѣемъ опредѣленіе $\cos\varphi/n$ и $\sin\varphi/n$ по даннымъ функціямъ $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Эта задача, однако, не поддается такъ просто рѣшенію, а требуетъ разрѣшенія алгебраическаго уравненія. Если мы положимъ $\varphi = n\alpha$, $x = 2\cos\alpha$, то мы представимъ уравненія (5) въ видѣ:

$$2\cos\varphi = A_n(x), \quad \sin\alpha = \frac{\sin\varphi}{B_n(x)}. \tag{8}$$

Первое изъ этихъ соотношеній даетъ намъ уравненіе n-той степени для опредѣленія x. Если мы возьмемъ одинъ изъ корней этого уравненія, то вторая формула дастъ намъ соотвѣтствующее значеніе $\sin\alpha$.

4. Однако, уравненіе n-той степени

$$A_n(x) = 2\cos\varphi$$

имѣетъ n корней. Слѣдующія соображенія выяснятъ, какое значеніе имѣютъ эти n корней. Если k есть любое цѣлое число, то

$$\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos\varphi, \quad \sin(\varphi + 2k\pi) = \sin\varphi;$$

если поэтому

$$x_0 = 2\cos\frac{\varphi}{n} = 2\cos\alpha$$

удовлетворяетъ уравненіямъ (8), то тѣмъ же уравненіямъ удовлетворяетъ также

$$x_k = 2\cos\left(\alpha + \frac{2\pi k}{n}\right).$$

Но, когда k нарастаетъ на число, кратное n, то $2\pi k/n$ увеличивается на число, кратное 2π, и число x_k остается, такимъ образомъ, безъ измѣненія. Сообразно этому имѣется только n различныхъ значеній x_k, именно

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}.$$

Эти же n значеній всѣ различны, за исключеніемъ только отдѣльныхъ частныхъ случаевъ *).

---

*) Если, напримѣръ, $\varphi = \pi$ и $n = 3$, то мы получаемъ только два различныхъ значенія

$$x_0 = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1, \quad x_1 = -2.$$

Точно такъ же и тотъ случай, что $B_n(x) = 0$, при которомъ второе изъ уравненій (8) теряетъ свой смыслъ, можетъ имѣть мѣсто только при особыхъ значеніяхъ перемѣннаго φ, именно, когда $\sin\varphi = 0$, такъ что φ есть кратное π. Эти частные случаи всегда ведутъ къ дѣленію полной окружности на равныя части, вопросъ, который мы разсмотрѣли въ томѣ I.

5. Однако, уравненіе n-той степени, отъ котораго зависитъ дѣленіе угла, имѣетъ замѣчательную особенность; именно, при любомъ значеніи n оно принадлежитъ къ числу тѣхъ уравненій, которыя разрѣшаются въ радикалахъ; для того частнаго случая, когда рѣчь идетъ о дѣленіи всей окружности, мы это уже доказали въ томѣ I. Не входя въ общую теорію этихъ уравненій, мы получаемъ результатъ по формулѣ Муавра (т. I, § 47, 8), согласно которой

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi},$$

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \sqrt[n]{\cos\varphi - i\sin\varphi},$$

$$1 = \sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi}\,\sqrt[n]{\cos\varphi - i\sin\varphi},$$

такъ что

$$x = \sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} + \sqrt[n]{\cos\varphi - i\sin\varphi}, \qquad (9)$$

гдѣ оба n-тыхъ корня связаны другъ съ другомъ такимъ образомъ, что каждый изъ нихъ представляетъ обратное значеніе другого; n различныхъ значеній x мы получаемъ, если даемъ n-тому корню n значеній, которыя онъ имѣетъ. Всѣ значенія x вещественны.

Въ случаѣ $n = 3$ выраженіе (9) представляетъ собой не что иное, какъ формулы Кардана для неприводимаго случая кубическаго уравненія; въ томѣ I мы уже извлекли нѣкоторую пользу изъ того, что привели этотъ случай къ дѣленію угла на три равныя части.

Здѣсь, какъ и тамъ, рѣшеніе въ общемъ случаѣ не можетъ быть выражено въ вещественныхъ радикалахъ. Это возможно только тогда, когда n есть степень 2; такъ, напримѣръ, для $n = 2$ и для $n = 4$ мы получаемъ:

$$\sqrt{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}},$$

$$\sqrt[4]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{8}}} + i\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{8}}}.$$

§ 31. Рѣшеніе треугольниковъ.

1. Теперь мы возвращаемся къ примѣненію тригонометрическихъ формулъ къ рѣшенію треугольниковъ. Формулы § 28-го содержатъ, правда, все, что для этого принципіально необходимо; но изъ нихъ можно вывести еще другія формулы, которыя болѣе удобны для различныхъ частныхъ случаевъ.

Мы будемъ исходить изъ задачи объ опредѣленіи угловъ α, β, γ по даннымъ тремъ сторонамъ a, b, c. Эта задача разрѣшается теоремой косинусовъ въ формѣ

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \tag{1}$$

и, такъ какъ уголъ α заключается между 0 и π, то онъ этимъ соотношеніемъ однозначно опредѣляется. Однако, для практическихъ цѣлей, особенно, при вычисленіяхъ съ логариѳмами, эта формула менѣе пригодна, такъ какъ здѣсь необходимо вычислить сначала квадраты и произведенія чиселъ a, b, c, вычислить далѣе значеніе дроби и по ней уже по таблицамъ разыскать уголъ α. Между тѣмъ таблицы не содержатъ самыхъ косинусовъ, а только ихъ Бригговы логариѳмы. Если мы квадраты и произведенія также желаемъ вычислять съ помощью логариѳмовъ, то придется логариѳмировать нѣсколько разъ, а это не только затруднительно, но и связано съ опасностью наслоенія погрѣшностей, съ которыми неизбѣжно связано логариѳмированіе. Этого можно было бы избѣжать, если бы мы располагали формулой, въ которой одна изъ тригонометрическихъ функцій была бы непосредственно выражена въ видѣ произведенія и частнаго или корня изъ данныхъ величинъ.

2. Чтобы этого достигнуть, мы изъ соотношенія (1) выводимъ двѣ формулы:

$$\begin{aligned} 1 + \cos\alpha &= \frac{-a^2 + (b+c)^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}, \\ 1 - \cos\alpha &= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}, \end{aligned} \tag{2}$$

а, такъ какъ, согласно § 29 (8), $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ и $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$, то

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Полагая здѣсь для сокращенія

$$a + b + c = 2s, \tag{3}$$

получаемъ:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \tag{5}$$

гдѣ всѣ радикалы должны быть взяты въ положительномъ ихъ значеніи, такъ какъ всѣ углы меньше 90^0.

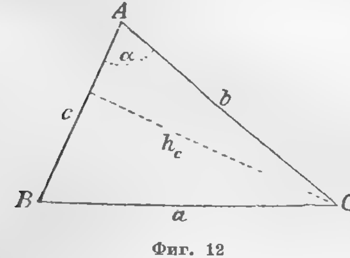
3. Площадь треугольника Δ равна полупроизведенію стороны на перпендикуляръ, опущенный на нее изъ противолежащей вершины, т. е. равна $\frac{1}{2}ch_c$ (фиг. 12). Но такъ какъ $h_c = b\sin\alpha$, то

$$\Delta = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \tag{6}$$

отсюда, въ виду формулъ (4), получаемъ:

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{7}$$

Площадь треугольника можно изящно выразить черезъ периметръ и углы: именно, если мы замѣнимъ α черезъ β и γ, то мы изъ соотношенія (5) получимъ:



Фиг. 12

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},$$

а отсюда путемъ умноженія:

$$\begin{aligned} s-a &= s\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma, \\ s-b &= s\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha, \\ s-c &= s\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta, \end{aligned} \tag{8}$$

и, наконецъ, подставляя эти выраженія въ формулу (7), найдемъ:

$$\Delta = s^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma. \tag{9}$$

4. Радіусъ r описанной окружности, согласно формулѣ, полученной выше (§ 28, 3), равенъ $a/2\sin\alpha$; слѣдовательно:

$$\begin{aligned} a &= 2r\sin\alpha = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \\ b &= 2r\sin\beta = 4r\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta, \\ c &= 2r\sin\gamma = 4r\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma. \end{aligned} \tag{10}$$

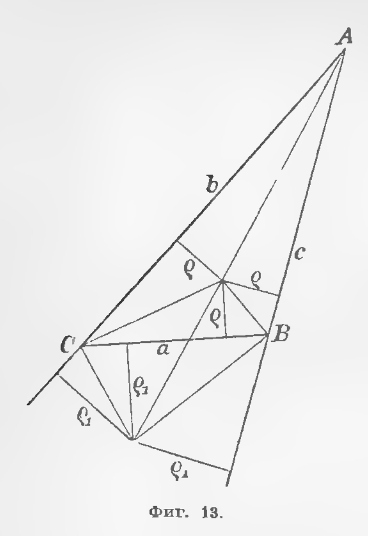
Въ виду же соотношеній (6) и (9)

$$abc = \frac{2\Delta a}{\sin\alpha} = 4r\Delta = 4rs^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Перемножая уравненія (10) и слагая результатъ съ этимъ выраженіемъ, мы найдемъ:

$$r = \frac{s}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}. \tag{11}$$

Чтобы вычислить радіусъ вписанной окружности ϱ и три радіуса внѣвписанныхъ окружностей $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, замѣтимъ, какъ это видно на фиг. 13, что



Фиг. 13.

$$2\Delta = \varrho(a+b+c) = \varrho_1(-a+b+c);$$

поэтому

$$\varrho = \frac{\Delta}{s},\quad \varrho_1 = \frac{\Delta}{s-a},\quad \varrho_2 = \frac{\Delta}{s-b},\quad \varrho_3 = \frac{\Delta}{s-c},$$

откуда

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{s-a}{\Delta} + \frac{s-b}{\Delta} + \frac{s-c}{\Delta} = \frac{1}{\varrho}.$$

Съ помощью формулъ (7) и (8) мы отсюда получаемъ:

$$\begin{aligned} \varrho &= s \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma, \\ \varrho_1 &= s \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \varrho_2 = s \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta, \\ \varrho_3 &= s \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma, \end{aligned} \tag{12}$$

что легко вывести и чисто геометрически. Если мы выразимъ Δ черезъ a, b, c по формулѣ (7), то получимъ

$$\begin{aligned} 4\varrho^2 &= \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c} = 4\,\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\ 4\varrho_1^2 &= \frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c} = 4\,\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a} \\ 4\varrho_2^2 &= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)}{a-b+c} = 4\,\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b} \\ 4\varrho_3^2 &= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)}{a+b-c} = 4\,\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}; \end{aligned} \tag{13}$$

ϱ_1^2 получается изъ ϱ^2, если мы замѣнимъ a на $-a$ или же b и c на $-b$ и $-c$, аналогично получаются остальные радіусы. Можно составить уравненіе 4-ой степени, корнями котораго служатъ $\varrho^2, \varrho_1^2, \varrho_2^2, \varrho_3^2$, а коэффиціенты котораго содержатъ квадраты сторонъ a, b, c (ср. § 24).

5. Какъ раньше мы исходили отъ задачи — опредѣлить по тремъ сторонамъ треугольника остальные его элементы, такъ здѣсь мы примемъ, что намъ даны двѣ стороны a и b, заключенный между ними уголъ γ, требуется же опредѣлить третью сторону c и углы α и β.

Непосредственное рѣшеніе даетъ намъ сначала теорема косинусовъ, когда же найдена сторона c, то теорема синусовъ. Если мы хотимъ раньше опредѣлить углы α и β, то первое изъ соотношеній (3) § 28-го даетъ:

$$c\cos\beta = a - b\cos\gamma,$$

а отсюда по теоремѣ синусовъ ($c \sin\beta = b \sin\gamma$)

$$b \operatorname{cotg}\beta \sin\gamma = a - b\cos\gamma;$$

а, слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}. \qquad (14)$$

6. Однако, эти формулы страдаютъ тѣмъ недостаткомъ, о которомъ мы уже говорили выше, именно онѣ не приспособлены для логариѳмическихъ вычисленій. Лучшіе результаты можно получить изъ гоніометрическихъ формулъ (9) § 29-го, въ которыхъ мы теперь напишемъ α и β вмѣсто a и b:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}(\sin\alpha + \sin\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}(\sin\alpha - \sin\beta) = \sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Такъ какъ $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, то $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$. Замѣняя же $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ равными имъ, согласно соотношеніямъ (10), величинами $a/2r$, $b/2r$, $c/2r$ и устраняя общаго множителя $1/2r$, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}(a+b)\cos\frac{\alpha+\beta}{2} &= c\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\ (a-b)\sin\frac{\alpha+\beta}{2} &= c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Эти формулы извѣстны подъ названіемъ уравненій Мольвейде *). Дѣля эти уравненія почленно другъ на друга, мы получаемъ теорему тангенсовъ:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Принимая во вниманіе, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, это уравненіе можемъ представить въ такомъ видѣ:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Если a, b, γ даны, то отсюда можно получить разность $\alpha - \beta$, а съ помощью ея и отдѣльные углы α и β, ибо

$$2\alpha = \pi + \alpha - \beta - \gamma, \quad 2\beta = \pi - \alpha + \beta - \gamma;$$

затѣмъ сторону c можно опредѣлить при помощи любого изъ уравненій (15).

*) Mollweide, род. въ 1774 г. въ г. Вольфенбюттелѣ, былъ математикомъ и астрономомъ, умеръ въ Лейпцигѣ въ 1825 году.

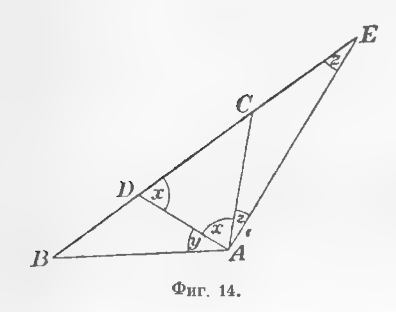
7. Уравненія Мольвейде можно также получить очень просто при помощи слѣдующихъ геометрическихъ соображеній.

Если мы въ треугольникѣ ABC (фиг. 14) отложимъ

$$CD = CE = CA,$$

то

$$BD = a \quad b, \quad BE = a + b.$$



Фиг. 14.

Далѣе

$$x + y = \alpha, \quad x - y = \beta,$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$z = \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$x + y + z = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2};$$

примѣняя поэтому теорему синусовъ къ треугольнику ADB, получимъ:

$$(a - b) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = c \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

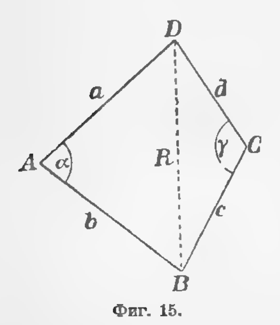
Точно такъ же изъ треугольника BAE имѣемъ:

$$(a + b) \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = c \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

что вполнѣ согласуется съ уравненіями (15).

§ 32. Рѣшеніе четырехугольниковъ.

1. Примѣненіе тригонометрическихъ формулъ къ рѣшенію многоугольниковъ производится такимъ образомъ, что мы разбиваемъ многоугольникъ на треугольники. Такъ, напримѣръ, въ четырехугольникѣ сумма угловъ равняется четыремъ прямымъ, т. е. равняется 2π, и четырехугольникъ опредѣляется пятью своими элементами.



Фиг. 15.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы, напримѣръ, примемъ, что даны четыре стороны и одинъ изъ угловъ, то мы получаемъ, во-первыхъ, треугольникъ, въ которомъ даны двѣ стороны и уголъ, между ними заключенный, и третьей стороной котораго служитъ діагональ четырехугольника. Эта діагональ съ двумя другими сторонами четырехугольника образуетъ второй треугольникъ, дополняющій первый до четырехугольника.

Положимъ теперь, что намъ даны четыре стороны и сумма двухъ противолежащихъ угловъ. Стороны четырехугольника $ABCD$ (фиг. 15) мы обозначимъ черезъ a, b, c, d, а углы черезъ α, β, γ, δ такимъ образомъ, что стороны a, b заключаютъ уголъ α, а стороны c, d — уголъ γ. Если теперь черезъ R обозначимъ діагональ BD, то теорема косинусовъ въ примѣненіи къ двумъ треугольникамъ ABD и BCD даетъ для R^2 два выраженія

$$R^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\gamma, \qquad (1)$$

и отсюда первое соотношеніе

$$\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = ab\cos\alpha - cd\cos\gamma. \qquad (2)$$

Если далѣе выразимъ площадь Θ четырехугольника, складывая площади двухъ треугольниковъ, то мы получимъ

$$2\Theta = ab\sin\alpha + cd\sin\gamma; \qquad (3)$$

возвышая же уравненія (2) и (3) въ квадратъ и складывая ихъ, получимъ (§ 27 (7), § 29 (1)):

$$4\Theta^2 + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha + \gamma).$$

Здѣсь мы положимъ:

$$a^2b^2 + c^2d^2 = (ab + cd)^2 - 2abcd,$$

и тогда мы получимъ (§ 29 (8)):

$$16\Theta^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\left(\cos\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)^2.$$

Съ другой стороны,

$$\begin{aligned}&(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab + cd)^2\\ &= ((a + b)^2 - (c - d)^2)((a - b)^2 - (c + d)^2)\\ &= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(a - b - c - d);\end{aligned}$$

если мы поэтому обозначимъ черезъ s полупериметръ:

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c + d),$$

то предыдущее выраженіе приметъ видъ:

$$-16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d).$$

Мы получаемъ, такимъ образомъ, окончательно для квадрата площади четырехугольника выраженіе:

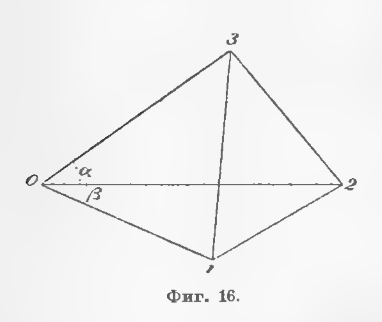
$$\Theta^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd\left(\cos\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)^2, \qquad (4)$$

въ которомъ $\alpha + \gamma$ можно замѣнить черезъ $\beta + \delta$.

Это выраженіе для Θ^2 при данныхъ сторонахъ a, b, c, d принимаетъ наибольшее значеніе, если $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)=0$, т. е. если $\alpha+\gamma=\pi$. Что сумма двухъ противолежащихъ угловъ равняется π, это служитъ критеріемъ вписаннаго четырехугольника. Мы получаемъ, такимъ образомъ, предложеніе:

Изъ всѣхъ четырехугольниковъ, имѣющихъ тѣ же самыя стороны, наибольшую площадь имѣетъ вписанный въ кругъ четырехугольникъ.

2. *Соотношеніе между отрѣзками, соединяющими четыре точки.* Четырехугольникъ также вполнѣ опредѣляется, если даны его стороны и одна діагональ. Въ самомъ дѣлѣ, по двумъ парамъ сторонъ и данной діагонали можно построить тѣ два треугольника, которые совмѣстно образуютъ нашъ четырехугольникъ. Однако, четырехугольникъ опредѣленъ однозначно только въ томъ случаѣ, когда вмѣстѣ съ тѣмъ дано, какія стороны пересѣкаются на данной діагонали и съ какой стороны ея. Такъ какъ этимъ опредѣляется вторая діагональ, то отсюда слѣдуетъ, что между шестью отрѣзками, соединяющими попарно четыре точки, существуетъ зависимость. Эту именно зависимость мы и желаемъ опредѣлить.



Фиг. 16.

Пусть 0, 1, 2, 3 (фиг. 16) будутъ четыре данныя точки, (01), (02), (03), (12), (13), (23) - отрѣзки, соединяющіе эти точки попарно. Примѣняя теорему косинусовъ къ треугольникамъ (023), (031), (012), мы получаемъ:

$$\begin{aligned}(23)^2 &= (02)^2+(03)^2-2(02)(03)\cos\alpha,\\ (31)^2 &= (03)^2+(01)^2-2(03)(01)\cos(\alpha+\beta),\\ (12)^2 &= (01)^2+(02)^2-2(01)(02)\cos\beta.\end{aligned}\qquad(5)$$

Если положимъ здѣсь для сокращенія:

$$\begin{aligned}a &= (01)^2, & A &= (02)^2+(03)^2-(23)^2,\\ b &= (02)^2, & B &= (03)^2+(01)^2-(31)^2,\\ c &= (03)^2, & C &= (01)^2+(02)^2-(12)^2,\end{aligned}\qquad(6)$$

то получимъ:

$$\begin{aligned}2\sqrt{bc}\cos\alpha &= A,\\ 2\sqrt{ca}\cos(\alpha+\beta) &= B,\\ 2\sqrt{ab}\cos\beta &= C,\end{aligned}\qquad(7)$$

$$8abc\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=ABC.$$

Между тремя углами α, β, $(\alpha+\beta)$, согласно соотношенію (6) § 28-го, имѣетъ мѣсто зависимость:

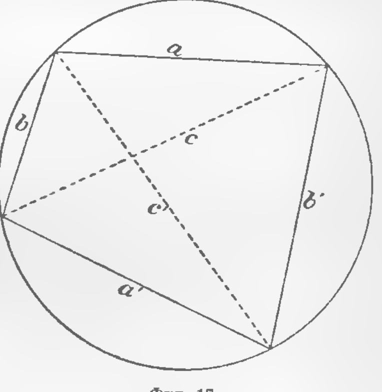
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = 1;$$

вставляя же сюда выраженія (7), получаемъ:

$$aA^2 + bB^2 + cC^2 = ABC + 4abc. \qquad (8)$$

Въ связи съ выраженіями (6) это и даетъ искомую зависимость *). При этомъ выводѣ, а также въ окончательномъ результатѣ, точкѣ 0 принадлежитъ извѣстное преимущество передъ другими. Однако, эта ассиметрія формулъ исчезаетъ, если мы въ равенство (8) вставимъ выраженія (6). Формулы становятся, однако, нѣсколько длинными. Если мы возьмемъ четыре точки въ пространствѣ, а не въ одной плоскости, то между ними и ихъ разстояніями не будетъ никакой зависимости. Но въ этомъ случаѣ мы можемъ выразить обьемъ тетраэдра, вершинами котораго служатъ эти точки, черезъ соединяющіе ихъ отрѣзки; приравнивая же этотъ объемъ нулю, мы получимъ условіе, при которомъ точки лежатъ въ одной плоскости.

3. Теорема Птолемея **). Если положеніе четырехъ точекъ не вполнѣ произвольно, то между четырьмя отрѣзками, ихъ соединяющими, могутъ имѣть мѣсто и другія соотношенія. Прежде всего, если точки лежатъ на одной окружности, то имѣетъ мѣсто теорема Птолемея, которую мы сейчасъ выведемъ.



Фиг. 17.

Пусть a, a' и b, b' будутъ двѣ пары противоположныхъ сторонъ вписаннаго четырехугольника, c, c' — его діагонали. Между этими отрѣзками имѣетъ мѣсто зависимость, которую легко вывести изъ теоремы косинусовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая уголъ, содержащійся между сторонами a и b, черезъ (ab) и уголъ между сторонами a' и b' черезъ $(a'b')$, мы изъ треугольниковъ abc и $a'b'c'$ (фиг. 17) будемъ имѣть:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(ab),$$
$$c^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos(a'b').$$

Такъ какъ далѣе углы (ab) и $(a'b')$ дополняютъ другъ друга до $2d$, то $\cos(ab) + \cos(a'b') = 0$. Поэтому изъ предыдущихъ соотношеній получаемъ:

*) Gauss' Werke, Bd. IX, S. 248.

**) Cp. Franz Meyer, Archiv der Math. u Physik (3) Bd. 7, S. 1.

$$c^2(ab+a'b') = (a^2+b^2)a'b' + (a'^2+b'^2)ab$$
$$= (aa'+bb')(ab'+ba'). \qquad (9)$$

Такимъ же образомъ изъ треугольниковъ $ab'c'$ и $a'bc'$ получаемъ:

$$c'^2(ab'+ba') = (aa'+bb')(ab+a'b'). \qquad (10)$$

Если мы перемножимъ эти соотношенія почленно и сократимъ на $(ab+a'b')(ab'+ba')$, то мы получимъ $c^2c'^2 = (aa'+bb')^2$; извлекая же отсюда квадратный корень, получимъ:

$$cc' = aa' + bb';$$

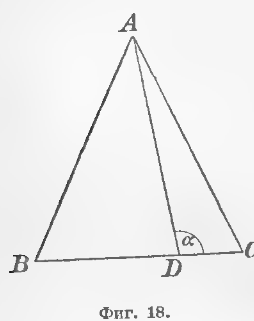
это и есть теорема Птолемея, которая въ словахъ выражается слѣдующимъ образомъ:

Во вписанномъ въ кругъ четырехугольникѣ прямоугольникъ, построенный на двухъ его діагоналяхъ, равенъ суммѣ прямоугольниковъ, соотвѣтственно построенныхъ на противоположныхъ сторонахъ.

Раздѣляя уравненія (9) и (10) другъ на друга и извлекая квадратный корень, получаемъ:

$$\frac{c}{c'} = \frac{ab'+ba'}{ab+a'b'}.$$

4. Теорема Стюарта*). Другой частный случай расположенія четырехъ точекъ имѣетъ мѣсто, если три точки расположены на одной прямой. Мы получаемъ тогда фиг. 18; рѣчь идетъ о шести отрѣзкахъ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, между которыми, прежде всего, имѣетъ мѣсто соотношеніе $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD}$. Между этими отрѣзками имѣетъ мѣсто, однако, еще одно соотношеніе, которое мы также получаемъ изъ теоремы косинусовъ. Именно, если обозначимъ уголъ ADC черезъ α, то теорема косинусовъ даетъ:



Фиг. 18.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\overline{AD}\cdot\overline{BD}\cos\alpha,$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{AD}\cdot\overline{CD}\cos\alpha.$$

Если исключимъ отсюда $\cos\alpha$, умножая первое уравненіе на $\overline{CD}$, а второе на $\overline{BD}$, то получаемъ:

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{CD} + \overline{AC}^2\cdot\overline{BD} = \overline{AD}^2(\overline{BD}+\overline{CD}) + \overline{BD}^2\cdot\overline{CD} + \overline{CD}^2\cdot\overline{BD}.$$

---

*) Mathew Stewart, теологъ и математикъ, жилъ 1717—1785 гг. въ Шотландіи.

Если же сюда подставимъ

$$\overline{BD}+\overline{CD}=\overline{BC},$$

$$\overline{BD}^2\cdot\overline{CD}+\overline{CD}^2\cdot\overline{BD}=\overline{BD}\cdot\overline{CD}(\overline{BD}+\overline{CD})=\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD},$$

то получимъ:

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}+\overline{AC}^2\cdot\overline{BD}-\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}=\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}:$$

это и есть теорема Стюарта.

§ 33. Точки Брокара.

1. Если изъ точки R, расположенной внутри треугольника ABC, проведемъ прямыя къ его вершинамъ, то послѣднія образуютъ со сторонами треугольника, вообще говоря, различные углы. Есть, однако, одно особенное положеніе точки R, при которомъ эти углы становятся равными:

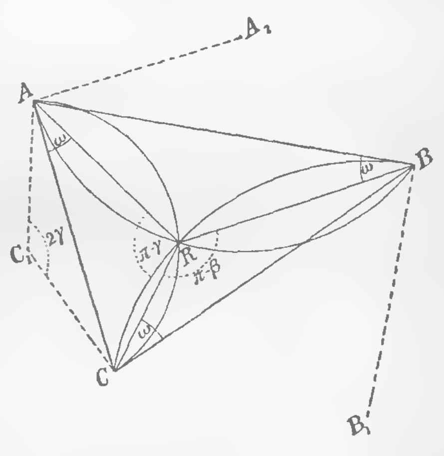
$$\sphericalangle RAC=\sphericalangle RCB=\sphericalangle RBA=\omega \quad \text{(фиг. 19).} \tag{1}$$

Аналогичнымъ образомъ можно отыскать такую точку R', чтобы

$$\sphericalangle R'AB=\sphericalangle R'BC=\sphericalangle R'CA. \tag{2}$$

Эти точки R и R' называются точками Брокара *).

Углы даннаго треугольника обозначимъ черезъ α, β, γ. Въ такомъ случаѣ въ треугольникѣ ACR уголъ при вершинѣ A равенъ ω, при вершинѣ C равенъ $\gamma-\omega$, а, слѣдовательно, при вершинѣ R уголъ равенъ $\pi-\gamma$. Если въ точкѣ C возставимъ перпендикуляръ CC_1 къ сторонѣ BC и построимъ равнобедренный треугольникъ ACC_1, то послѣдній имѣетъ при вершинахъ A и C углы $\pi/2-\gamma$, а, слѣдовательно, уголъ при вершинѣ C_1 равенъ 2γ. Поэтому C_1 есть центръ дуги ARC, вмѣщающей вписанный уголъ $\pi-\gamma$. Точка R лежитъ, слѣдовательно, на окружности, описанной изъ точки C_1 радіусомъ $\overline{C_1C}$.



Фиг. 19.

Если мы произведемъ то же построеніе для двухъ другихъ сторонъ треугольника, то мы получимъ три окружности, которыя пересѣкаются въ искомой точкѣ R.

*) Ср. главу о новой геометріи треугольника въ сочиненіи: E Pascal, „Repertorium der höheren Mathematik“ [1]).

[1]) Подробное изложеніе новой геометріи треугольника можно найти также въ русскомъ сочиненіи Д Ефремова „Новая геометрія треугольника“.

2. Чтобы опредѣлить уголъ ω, примѣнимъ теорему синусовъ къ двумъ треугольникамъ CRA и CRB. Мы тогда получимъ:

$$RC = \frac{b \sin\omega}{\sin\gamma} = \frac{a \sin(\beta - \omega)}{\sin\beta}.$$

Если же здѣсь, опять-таки по теоремѣ синусовъ въ примѣненіи къ данному треугольнику, положимъ $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$, то получимъ:

$$\frac{\sin\beta \sin\omega}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha \sin(\beta - \omega)}{\sin\beta};$$

а такъ какъ по теоремѣ сложенія

$$\sin(\beta - \omega) = \sin\beta\cos\omega - \cos\beta\sin\omega,$$

то

$$\sin\omega\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta}\right) = \cos\omega\sin\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma\sin\alpha};$$

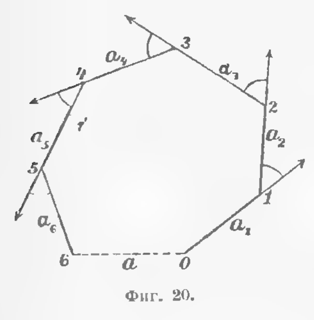
наконецъ, такъ какъ $\sin\beta = \sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha$, то

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma. \qquad (1)$$

Если мы отложимъ тотъ же уголъ ω въ вершинахъ A, B, C не при сторонахъ b, a, c, а при сторонахъ c, a, b, то мы получимъ вторую точку Брокара.

§ 34. Основныя формулы для многоугольника.

1. Разсмотримъ ломанную линію 0, 1, 2, 3, . . ., n, состоящую изъ отрѣзковъ a_1, a_2, a_3, . . ., a_n. Мы предположимъ, что каждый отрѣзокъ повернутъ отъ предыдущаго на опредѣленный уголъ въ одномъ опредѣленномъ, произвольно установленномъ направленіи, которое мы примемъ за направленіе положительнаго вращенія; мы примемъ, что углы поворота, которые мы обозначимъ послѣдовательно черезъ (12), (23), . . ., (n - 1, n), всѣ меньше π, и что сумма ихъ меньше четырехъ прямыхъ, такъ что направленіе отрѣзковъ не сдѣлало полнаго оборота (фиг. 20).



Фиг. 20.

Если мы соединимъ конечную точку n съ исходной точкой 0 отрѣзкомъ a, то мы получимъ многоугольникъ (о $n + 1$ сторонахъ) съ исключительно выходящими вершинами, въ которомъ несмежныя стороны

нигдѣ не пересѣкаются. Углы же этого многоугольника равны $\pi - (12)$, $\pi - (23), \ldots$.

Поворотъ (i, k) стороны a_k относительно стороны a_i, если $k > i$, выражается положительнымъ угломъ, именно

$$(i, k) = (i, i+1) + (i+1, i+2) + \ldots + (k-1, k).$$

Отрѣзками $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и углами поворота $(12), (23), \ldots, (n-1, n)$ ломанная, а вмѣстѣ съ тѣмъ и многоугольникъ, однозначно опредѣлены. Но самые эти $2n-1$ элементовъ (въ извѣстныхъ предѣлахъ) могутъ быть заданы совершенно произвольно.

Если ломанная замыкается, то она образуетъ n-угольникъ. Сумма угловъ $(12) + (23) + \ldots + (n-1, n)$ равна 2π, а отрѣзокъ a долженъ быть равенъ нулю.

2. Постараемся опредѣлить замыкающій отрѣзокъ a по даннымъ элементамъ $a_1, a_2, \ldots, a_n, (12), (23), \ldots, (n-1, n)$; мы начнемъ съ случая $n = 3$ (фиг. 21).

Мы продолжимъ стороны a_1 и a_3 до пересѣченія въ точкѣ 4 и обозначимъ отрѣзки 41, 42 черезъ a_1' и a_3'; тогда изъ треугольника (412), въ которомъ уголъ при вершинѣ 4 равенъ $\pi - (13)$, получаемъ:

$$a_1' = a_2 \frac{\sin(23)}{\sin(13)}, \quad a_3' = a_2 \frac{\sin(12)}{\sin(13)},$$

а, слѣдовательно, по теоремѣ косинусовъ,

$$a^2 = \left(a_1 + a_2 \frac{\sin(23)}{\sin(13)}\right)^2 + \left(a_3 + a_2 \frac{\sin(12)}{\sin(13)}\right)^2$$
$$+ 2\left(a_1 + a_2 \frac{\sin(23)}{\sin(13)}\right)\left(a_3 + a_2 \frac{\sin(12)}{\sin(13)}\right)\cos(13);$$

Фиг. 21.

пользуясь же формулами

$$\sin(13) = \sin(12)\cos(23) + \cos(12)\sin(23),$$
$$\cos(13) = \cos(12)\cos(23) - \sin(12)\sin(23),$$

мы получаемъ съ помощью простого вычисленія:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3\cos(23)$$
$$+ 2a_3a_1\cos(31) + 2a_1a_2\cos(12). \qquad (1)$$

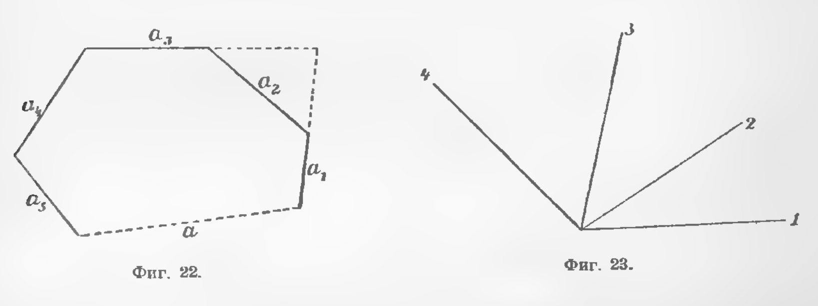
Эта формула остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда прямыя a_1 и a_3 пересѣкаются подъ стороной a.

Пользуясь знакомъ суммованія, эту формулу можно представить въ такомъ видѣ:

$$a^2 = \Sigma a_i^2 + 2\Sigma a_i a_k \cos(i,\ k). \qquad (2)$$

Въ этой формѣ она справедлива для любого n, если мы распространимъ первую сумму на всѣ значенія i отъ 1 до n, а вторую на всѣ сочетанія чиселъ 1, 2, . . ., n по два.

Эту формулу во всей ея общности легко доказать путемъ перехода отъ $n-1$ къ n; для этого достаточно ломанную $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ привести къ $n-1$ отрѣзкамъ, пропуская одну изъ сторонъ и продолжая



Фиг. 22. Фиг. 23.

двѣ другія до ихъ пересѣченія, такъ что получится $n-1$ отрѣзковъ $a_1', a_3', a_4, \ldots, a_n$, для которыхъ формула считается доказанной (фиг. 22). Теперь остается воспользоваться первой изъ двухъ формулъ:

$$\begin{aligned} \sin(13)\cos(24) &= \sin(23)\cos(14) + \sin(12)\cos(34), \\ \sin(13)\sin(24) &= \sin(23)\sin(14) + \sin(12)\sin(34), \end{aligned} \qquad (3)$$

которыя легко получимъ изъ теоремы сложенія тригонометрическихъ функцій, если положимъ (фиг. 23):

$$\begin{aligned} (14) &= (13) + (34), \\ (24) &= (23) + (34), \\ (12) &= (13) - (23). \end{aligned}$$

3. Непосредственно мы можемъ придти къ формулѣ (2) также слѣдующимъ путемъ. Выберемъ произвольное постоянное направленіе X въ плоскости многоугольника и обозначимъ черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ углы между направленіемъ X и направленіями $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, отсчитывая послѣднія въ сторону положительнаго вращенія. Тогда

$$(i,\ k) = \alpha_k - \alpha_i;$$

вмѣстѣ съ тѣмъ $a_k \cos\alpha_k$ есть проекція отрѣзка a_k на направленіе X, считая таковую положительной или отрицательной, смотря по тому, будетъ ли соотвѣтствующій уголъ α острый или тупой.

Такъ какъ многоугольникъ замкнутый, то сумма всѣхъ положительныхъ проекцій должна имѣть такую же длину, какъ и сумма всѣхъ отрицательныхъ проекцій; сумма же всѣхъ этихъ проекцій равна нулю. Это справедливо даже и въ томъ случаѣ, если многоугольнихъ имѣетъ входящіе углы, а также, если стороны многоугольника другъ друга пересѣкаютъ. Итакъ,

$$a \cos \alpha = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_n \cos \alpha_n.$$

Если мы теперь замѣнимъ направленіе X перпендикулярнымъ къ нему направленіемъ Y, то всѣ углы α_i возрастутъ на $\pi/2$, и мы получаемъ:

$$a \sin \alpha = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots + a_n \sin \alpha_n.$$

Возвышая двѣ послѣднія формулы въ квадратъ, складывая ихъ и принимая во вниманіе, что

$$\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 = 1,$$

$$\cos \alpha_i \cos \alpha_k + \sin \alpha_i \sin \alpha_k = \cos(\alpha_k - \alpha_i),$$

мы получаемъ формулу (2).

4. Легко выразить также площадь многоугольника черезъ стороны $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и углы (i, k).

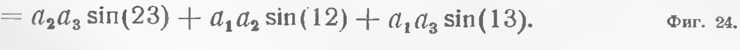
Мы опять начнемъ съ четырехугольника 0 1 2 3 (фиг. 24), который мы дополнимъ до треугольника 0 4 3. Если F есть площадь четырехугольника, то

$$2F = -(a_1' a_3' - (a_1' + a_1)(a_3' + a_3)) \sin(13);$$

съ помощью же формулъ

$$a_1' = a_2 \frac{\sin(23)}{\sin(13)}, \quad a_3' = a_2 \frac{\sin(12)}{\sin(13)}$$

получаемъ:



$$2F = a_2 a_3 \sin(23) + a_1 a_2 \sin(12) + a_1 a_3 \sin(13).$$

Фиг. 24.

Это выраженіе можно опять-таки написать въ формѣ

$$2F = \Sigma a_i a_k \sin(i, k),$$

въ которой оно остается справедливымъ при любомъ числѣ сторонъ.

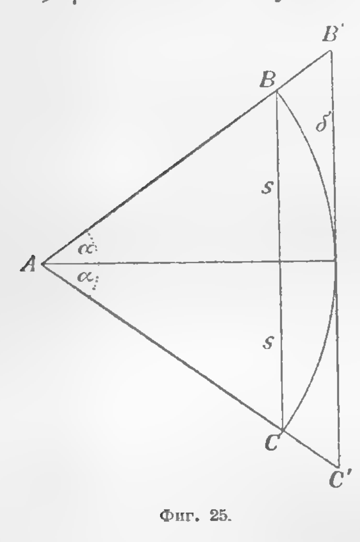
§ 35. Периметръ и площадь правильнаго многоугольника.

1. Если мы въ кругѣ радіуса r возьмемъ центральный уголъ 2α, меньшій π, при чемъ α есть дуговая мѣра угла, то длина соотвѣтствующей дуги равна $2r\alpha$, а площадь сектора равна $r^2\alpha$. Хорда $2s$ имѣетъ

длину $2r\sin\alpha$, а площадь $AB'C'$ равна $r^2\operatorname{tg}\alpha$ (фиг. 25). Такъ какъ хорда короче дуги, а площадь треугольника больше площади сектора, то

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

2. Положимъ, что α и β суть два угла первой четверти, при чемъ $\alpha > \beta$. Въ такомъ случаѣ



Фиг. 25.

$$\frac{\sin\beta}{\beta} - \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha\sin\beta - \beta\sin\alpha}{\alpha\beta}, \tag{2}$$

и, если въ числителѣ послѣдней дроби положимъ

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin(\beta + \alpha - \beta)\\ &= \sin\beta\cos(\alpha-\beta) + \cos\beta\sin(\alpha-\beta),\end{aligned}$$

то получимъ:

$$\begin{aligned}&\alpha\sin\beta - \beta\sin\alpha\\ &\quad= (\beta+\alpha-\beta)\sin\beta - \beta\sin\beta\cos(\alpha-\beta)\\ &\qquad - \beta\cos\beta\sin(\alpha-\beta)\\ &\quad= \beta\sin\beta(1-\cos(\alpha-\beta))\\ &\qquad + \beta(\alpha-\beta)\cos\beta\left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\right).\end{aligned}$$

Но это выраженіе въ виду неравенства (1) всегда имѣетъ положительное значеніе, ибо

$$\cos(\alpha-\beta) < 1, \quad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} > 1, \quad \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} < 1,$$

а, слѣдовательно, и разность (2) также имѣетъ положительное значеніе. Итакъ:

Пока уголъ α остается между 0 и $\pi/2$, дробь $\sin\alpha : \alpha$ убываетъ, когда α возрастаетъ.

3. Въ томъ же предположеніи $\alpha > \beta$ мы разсмотримъ еще разность

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} = \frac{\beta\sin\alpha\cos\beta - \alpha\sin\beta\cos\alpha}{\alpha\beta\cos\alpha\cos\beta},$$

которую можно еще написать и въ такомъ видѣ:

$$\frac{(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{2\alpha\beta\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta\cos\alpha\cos\beta}\left(\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\right).$$

Такъ какъ $\alpha+\beta > \alpha-\beta$, то эта разность, въ силу предыдущей теоремы, имѣетъ положительное значеніе. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ предложеніе:

Пока α остается между 0 и $\pi/2$, дробь $\operatorname{tg}\alpha : \alpha$ возрастаетъ вмѣстѣ съ α.

4. Если мы теперь возьмемъ уголъ 2α равнымъ n-той части четырехъ прямыхъ, т. е. $= 2\pi/n$, то отрѣзки BC и $B'C'$ становятся сторонами правильныхъ n-угольниковъ, а треугольники ABC, $AB'C'$ составляютъ каждый n-тую часть соотвѣтствующаго многоугольника. Первый изъ этихъ многоугольниковъ вписанъ въ окружность радіуса r, второй описанъ.

Если мы обозначимъ черезъ S и S' периметры этихъ многоугольниковъ, черезъ F и F' ихъ площади, то

$$S = 2nr\sin\frac{\pi}{n}, \quad F = nr^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n},$$

$$S' = 2nr\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \quad F' = nr^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Длина окружности содержится между S и S', площадь круга между F и F'. Чѣмъ болѣе возрастаетъ n, тѣмъ ближе подходятъ другъ къ другу S и S', съ одной стороны, F и F', съ другой стороны. Общимъ предѣломъ S и S' служитъ окружность круга $2r\pi$, общимъ предѣломъ F и F' площадь круга $r^2\pi$.

5. Мы можемъ выразить площадь n-угольника также черезъ периметръ, если исключимъ r изъ выраженій для S и F (или изъ выраженій для S' и F'). Такимъ образомъ, мы получимъ

$$F = \frac{S^2}{4n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

Если периметръ S не мѣняется, а n возрастаетъ, то $n\operatorname{tg}(\pi/n)$, согласно п. 3, убываетъ; выраженіе для F возрастаетъ. Отсюда вытекаетъ важное предложеніе:

Обыкновенный правильный многоугольникъ даннаго периметра имѣетъ тѣмъ большую площадь, чѣмъ больше число его вершинъ n.

Верхней границей значеній F служитъ $S^2/4\pi$, т. е. площадь круга радіуса $S : 2\pi$ (т. I, § 118, 4).

ГЛАВА VI.

Геометрія и тригонометрія сферы.

А. Оріентировка на сферѣ.

§ 36. Введеніе. — Эйлеровы треугольники.

1. Въ плоской тригонометріи мы научились по тремъ независимымъ элементамъ треугольника вычислять остальные. Практическое значеніе такихъ вычисленій заключается въ томъ, что мы пріобрѣтаемъ возможность, установивъ одинъ базисъ, производить измѣреніе на земной поверхности, опредѣляя только углы.

Однако, совершенно ясно, что такого рода измѣренія могутъ претендовать на точность лишь до тѣхъ поръ, пока они ограничиваются небольшими пространствами на поверхности земли, точнѣе, пока мы можемъ пренебрегать кривизной земной поверхности. Если же намъ приходится имѣть дѣло съ измѣреніями большихъ пространствъ, то треугольники имѣютъ уже не плоскую поверхность, а кривую: вмѣсто плоскихъ треугольниковъ появляются такимъ образомъ „сферическіе треугольники“, вмѣсто плоской тригонометріи намъ необходимо пользоваться сферической тригонометріей.

Однако, исторически сферическая тригонометрія ведетъ свое начало не отъ измѣреній на землѣ, а отъ измѣреній на небѣ. По возрасту она является даже старшей сестрой плоской тригонометріи. Тайны звѣзднаго неба съ древнихъ временъ имѣли для людей непреодолимую привлекательность; ихъ изслѣдованію были посвящены древнѣйшія усилія математиковъ. Отсюда и возникла сферическая тригонометрія, и по сей день она остается для астрономовъ необходимой и вѣрной помощницей.

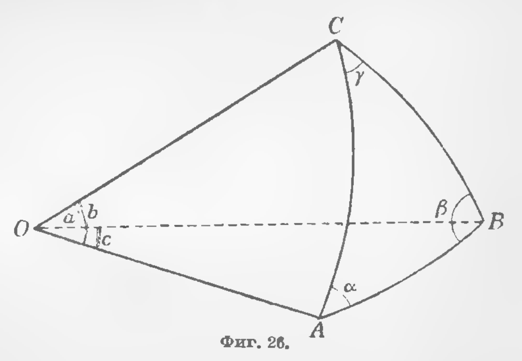
2. Какъ въ плоской тригономеріи предполагаются извѣстными важнѣйшія свойства плоской геометріи, такъ и сферическая тригонометрія предполагаетъ знакомство съ геометрическими соотношеніями на сферѣ. Эту часть геометріи принято называть „сферикой“ — геометріей сферы.

Однако, представляется нецѣлесообразнымъ строго раздѣлять сферику отъ сферической тригонометріи. Обѣ дисциплины проникаютъ и оплодотворяютъ другъ друга. Въ первой части мы будемъ, правда, заниматься исключительно чистой сферикой, во второй — чистой сферической тригонометріей, но въ третьей части нѣкоторыя замѣчательныя свойства формулъ сферической **тригонометріи** приведутъ насъ къ существеннымъ и широкимъ обобщеніямъ въ области чистой сферики. Четвертая часть посвящена практическимъ примѣненіямъ сферической тригонометріи; наконецъ, позже, когда мы будемъ уже владѣть методами аналитической геометріи, мы познакомимся съ другимъ соединеніемъ сферики, сферической тригонометріи и аналитической геометріи — съ такъ называемой „**аналитической сферикой**“ (§ 83).

3. Выбравъ три точки A, B, C на сферѣ, мы можемъ многообразно соединять ихъ попарно кривыми линіями. Однако, подобно тому, какъ на плоскости подъ треугольникомъ мы разумѣемъ систему трехъ точекъ съ соединяющими ихъ кратчайшими линіями — прямыми, такъ мы и **сферическій треугольникъ опредѣляемъ, какъ систему трехъ точекъ съ кратчайшими на поверхности сферы линіями, ихъ соединяющими; таковыми, какъ можно показать, являются дуги окружностей большихъ круговъ, не превосходящія полуокружности.**

Наглядно можно изготовить такого рода треугольники изъ кусковъ апельсинной корки.

4. Подъ стороной сферическаго треугольника казалось бы наиболѣе естественнымъ разумѣть абсолютную длину s соотвѣтствующей дуги большого круга. Если мы, однако, представимъ себѣ рядъ сферъ, концентрическихъ съ данной сферой, и на нихъ рядъ треугольниковъ, подобныхъ данному сферическому треугольнику, то послѣдніе отличаются другъ отъ друга только масштабомъ, а не по существу. Поэтому за стороны треугольниковъ стараются принять такія величины, которыя не зависятъ отъ радіуса сферы. Этого можно достигнуть, если принять за стороны не длины соотвѣтствующихъ дугъ, а ихъ отношенія къ радіусу r. Если s_{AB} есть длина дуги большого круга, проходящей между точками A и B, и если мы обозначимъ стороны, какъ и въ плоскомъ треугольникѣ, строчными буквами, соотвѣтствующими противо-



Фиг. 26.

положнымъ вершинамъ, то стороны сферическаго треугольника опредѣляются слѣдующими уравненіями (фиг. 26):

$$a = BC = \frac{s_{BC}}{r},$$

$$b = CA = \frac{s_{CA}}{r},$$

$$c = AB = \frac{s_{AB}}{r}.$$

Но, съ другой стороны, $s_{BC} \cdot r$ есть не что иное, какъ уголъ BOC, выраженный въ дуговой мѣрѣ, если O есть центръ сферы. Мы можемъ поэтому сказать:

Сторонами сферическаго треугольника служатъ плоскіе углы трехграннаго угла, проектирующаго сферическій треугольникъ изъ центра сферы.

Этимъ устанавливается тѣснѣйшая связь между сферикой и геометріей проектирующаго трехграннаго угла. Каждому предложенію, касающемуся одного образа, соотвѣтствуетъ предложеніе, относящееся къ другому образу.

5. За углы сферическаго треугольника мы будемъ принимать углы, образуемые соотвѣтствующими дугами и содержащіеся между 0 и π. Такъ какъ углы между кривыми линіями измѣряются углами между касательными, а послѣднія для сферическихъ кривыхъ перпендикулярны къ радіусу, проведенному къ точкѣ касанія, то мы можемъ сказать:

Углами сферическаго треугольника служатъ двугранные углы проектирующаго трехграннаго угла.

Эти углы мы будемъ помѣчать греческими буквами по соотвѣтствующимъ вершинамъ.

6. Установленное выше понятіе о сферическомъ треугольникѣ мы будемъ называть Эйлеровымъ; это будетъ намъ кстати напоминать, что на Эйлера нужно смотрѣть, какъ на отца современной сферической тригонометріи *).

Это понятіе исключительно господствовало въ наукѣ до XIX-го столѣтія, въ школахъ же до настоящаго времени.

---

*) Principes de la Trigonométrie sphérique, tirés de la méthode des plus grands et plus petits. Mém. de l'Acad. de Berlin, t. IV, 1753 —Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata Act. Petrop. 1779. Оба мемуара (изъ которыхъ первый, исходящій отъ дифференціальныхъ уравненій геодезическихъ линій, не элементаренъ) имѣются на нѣмецкомъ языкѣ въ изданіи классиковъ Оствальда (Ostwalds Klassiker, № 73).

Характерными особенностями Эйлеровыхъ треугольниковъ являются слѣдующія:

a) Стороны и углы Эйлерова треугольника лежатъ между 0 и π.

b) Три точки на поверхности сферы опредѣляютъ одинъ и только одинъ Эйлеровъ треугольникъ, если никакія двѣ изъ нихъ не расположены діаметрально другу къ другу.

7. Изъ геометрическихъ свойствъ трехграннаго угла вытекаютъ нѣкоторыя предложенія относительно Эйлеровыхъ треугольниковъ, которыми намъ придется часто пользоваться въ четвертомъ отдѣлѣ.

1. Сумма сторонъ Эйлерова треугольника содержится между 0 и 2π.
2. Сумма угловъ Эйлерова треугольника лежитъ между π и 3π.
3. Въ Эйлеровомъ треугольникѣ противъ большаго угла лежитъ бóльшая сторона, а противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы.

§ 37. Стереографическая проекція.

1. Чтобы избѣжать затрудненій при изображеніи перспективныхъ чертежей, которые еще усложняются въ слѣдующемъ параграфѣ вслѣдствіе особой формы фигурирующихъ тамъ треугольниковъ, очень желательно имѣть такое отображеніе сферическихъ фигуръ на плоскости, по которому можно было бы ясно распознавать первоначальныя пространственныя соотношенія.

Это достигается при помощи отображенія, которое въ картографіи извѣстно подъ названіемъ „стереографической проекціи".

При стереографической проекціи точки сферы проектируются изъ точки (центръ проекціи), лежащей на сферѣ, на плоскость, перпендикулярную къ діаметру, проходящему черезъ центръ проекціи.

Для упрощенія рѣчи мы представимъ себѣ сферу въ видѣ земного шара и сообразно этому будемъ говорить о сѣверномъ полюсѣ, южномъ полюсѣ и т. д.

За центръ проекцій мы выбираемъ южный полюсъ; за плоскость проекцій плоскость экватора ε.

Каждой точкѣ P сферы въ такомъ случаѣ отвѣчаетъ точка P' на плоскости ε. Точки, расположенныя на экваторѣ, отвѣчаютъ каждая самой себѣ. Изображенія точекъ сѣвернаго полушарія расположены внутри экватора, а изображенія точекъ южнаго полушарія — внѣ экватора. Южному полюсу соотвѣтствуетъ любая, безконечно удаленная точка плоскости ε. Въ видахъ однозначности цѣлесообразно принять за безконечно удаленный образъ на плоскости не „безконечно удаленную прямую", а „безконечно удаленную точку", какъ это дѣлается въ ученіи объ инверсіи (§ 9).

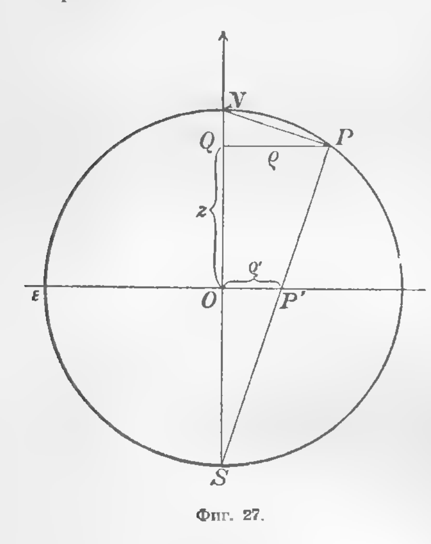
Въ такомъ случаѣ отображеніе будетъ однозначное.

2. Въ видахъ дальнѣйшихъ нашихъ разсужденій мы воспользуемся въ теченіе короткаго времени системой прямоугольныхъ координатъ, начало которыхъ совпадаетъ съ центромъ сферы O, оси x-овъ и y-овъ расположены въ плоскости экватора, а положительная ось z-овъ идетъ отъ центра къ сѣверному полюсу *).

Нѣкоторая точка P на сферѣ имѣетъ координаты x, y, z. Каковы координаты x', y' ея изображенія P'?.

Для отвѣта на этотъ вопросъ мы введемъ сверхъ прямоугольныхъ координатъ еще полярныя. Пусть φ, ϱ и z будутъ полярные координаты точки P, гдѣ φ означаетъ уголъ, который образуетъ меридіональная плоскость, проходящая черезъ точку P, съ плоскостью перваго меридіана, а ϱ означаетъ разстояніе точки P отъ земной оси; пусть φ' и ϱ' будутъ координаты точки P'. Тогда, очевидно,

$$\varphi' = \varphi. \tag{1}$$



Фиг. 27.

Если радіусъ сферы r извѣстенъ, то положеніе любой точки P опредѣляется двумя данными, — напримѣръ, φ и z. Принимая во вниманіе соотношеніе (1) и то обстоятельство, что ϱ зависитъ только отъ z, а не отъ φ, намъ остается еще только выразить ϱ' черезъ z (и r). Съ этою цѣлью мы можемъ выбрать точку P въ плоскости чертежа (фиг. 27). Тогда

$$\triangle SOP' \sim \triangle SQP \sim \triangle PQN.$$

Поэтому

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{r}{r+z}, \tag{2}$$

$$\frac{\varrho'}{r} = \frac{r-z}{\varrho}; \tag{3}$$

слѣдовательно:

$$\varrho'^2 = r^2 \frac{r-z}{r+z}; \quad z = r\,\frac{r^2-\varrho'^2}{r^2+\varrho'^2}. \tag{4}$$

Предложеніе. Переходъ отъ точекъ P на сферѣ къ соотвѣтствующимъ точкамъ P' на плоскости выражается уравненіями:

$$\varphi' = \varphi, \ \varrho'^2 = r^2 \frac{r-z}{r+z},$$

*) См. главу „Аналитическая геометрія въ пространствѣ“ (§ 98).

а переходъ отъ плоскости къ сферѣ — уравненіями

$$\varphi = \varphi', \quad \zeta = r\,\frac{r^2 - \varrho'^2}{r^2 + \varrho'^2}.$$

3. Изслѣдуемъ теперь, какъ окружности плоскости отображаются на сферѣ.

Каждая окружность въ плоскости въ полярныхъ координатахъ выражается уравненіемъ:

$$\varrho'^2 + A\varrho'\cos\varphi' + B\varrho'\sin\varphi' + C = 0. \tag{5}$$

При помощи соотношеній (2) и (1) мы получаемъ:

$$\varrho'\cos\varphi' = \varrho'\,\frac{x'}{\varrho'} = \varrho'\,\frac{x}{\varrho} = x\,\frac{r}{r+\zeta},$$

$$\varrho'\sin\varphi' = \varrho'\,\frac{y'}{\varrho'} = \varrho'\,\frac{y}{\varrho} = y\,\frac{r}{r+\zeta};$$

поэтому уравненіе 5-ое переходитъ въ уравненіе

$$Arx + Bry + (C - r^2)\zeta + r(C + r^2) = 0. \tag{6}$$

Это — уравненіе плоскости. Плоскость же пересѣкаетъ сферу по окружности. Такъ какъ, съ другой стороны, уравненіе (6) можетъ выразить любую плоскость, то и любая окружность на сферѣ можетъ быть разсматриваема, какъ пересѣченіе ея съ нѣкоторой плоскостью вида (6). Мы получаемъ такимъ образомъ предложеніе.

Каждая окружность на сферѣ при стереографической проекціи отображается на плоскости окружностью и обратно — каждая окружность на плоскости соотвѣтствуетъ окружности на сферѣ.

Только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ коэффиціентовъ A, B и C обращается въ безконечность, окружность (5) переходитъ въ прямую; между тѣмъ какъ уравненіе (6), попрежнему, выражаетъ окружность (проходящую черезъ южный полюсъ), какъ въ этомъ не трудно убѣдиться также изъ непосредственныхъ геометрическихъ соображеній. Поэтому здѣсь, какъ и въ планиметріи, цѣлесообразно разсматривать прямую, какъ выродившуюся окружность.

4. Двѣ окружности, проходящія черезъ южный полюсъ и имѣющія вторую точку пересѣченія P, согласно п. 3, отображаются на плоскости ε двумя прямыми, пересѣкающимися въ нѣкоторой точкѣ P'. Уголъ, который окружности образуютъ при точкѣ P, вслѣдствіе симметріи, будетъ такой же, какъ при точкѣ S. Послѣдній же, какъ легко видѣть, опредѣляется пересѣченіемъ плоскостей двухъ окружностей съ касательной плоскостью въ точкѣ S. Но такъ какъ эта касательная плоскость параллельна экваторіальной плоскости, то отсюда слѣдуетъ:

Двѣ окружности, проходящія черезъ точку S, пересѣкаются подъ тѣмъ же угломъ, какъ и изображающія ихъ прямыя.

Двумъ безконечно близкимъ точкамъ сферы также отвѣчаютъ безконечно близкія точки на плоскости. Изъ послѣдняго предложенія поэтому непосредственно вытекаетъ:

Любыя двѣ кривыя на сферѣ пересѣкаются подъ тѣмъ же угломъ, какъ и ихъ стереографическія изображенія.

Всякое отображеніе, при которомъ сохраняются углы, называется конформнымъ отображеніемъ.

Стереографическая проекція представляетъ собой конформное отображеніе.

5. Для насъ наиболѣе важны изображенія окружностей большихъ круговъ. Такъ какъ каждый большой кругъ дѣлитъ пополамъ экваторъ, который представляетъ свое собственное изображеніе, то изъ п. 3 слѣдуетъ:

Каждая окружность большого круга и только таковая имѣетъ своимъ изображеніемъ окружность, дѣлящую пополамъ экваторъ; пользуясь терминологіей § 9, мы можемъ сказать, что изображенія окружностей большого круга пересѣкаютъ экваторъ діаметрально.

Сферическій треугольникъ изображается, такимъ образомъ, треугольникомъ, образованнымъ круговыми дугами, дѣлящими пополамъ экваторъ. Оба треугольника имѣютъ одинаковые углы, но различныя стороны.

Впрочемъ, и стороны эти легко могутъ быть найдены геометрическими построеніями (§ 39, 15).

Обратно, любымъ тремъ окружностямъ на плоскости, имѣющимъ общую діаметральную окружность ε, всегда отвѣчаетъ сфера, на которой треугольнику, составленному изъ дугъ названныхъ трехъ окружностей, стереографически соотвѣтствуетъ сферическій треугольникъ; экваторомъ этой сферы служитъ окружность ε.

6. Представимъ себѣ касательную плоскость къ сферѣ въ точкѣ N. Если прямая SP встрѣчаетъ эту плоскость въ точкѣ P'', то, по теоремѣ Пиѳагора,

$$SP \cdot SP'' = 4r^2;$$

такъ какъ, съ другой стороны, $SP'' = 2SP'$ вслѣдствіе подобія треугольниковъ SOP' и SNP'', то

$$SP \cdot SP' = 2r^2.$$

Такимъ образомъ, мы получаемъ предложеніе:

Стереографическая проекція есть не что иное, какъ инверсія съ центромъ S и степенью $2r^2$ (см. §§ 9, 11, 24).

§ 38. Треугольники Мёбіуса.

1. Въ то время, какъ на плоскости между двумя точками проходитъ только одинъ прямолинейный отрѣзокъ, мы можемъ на сферѣ соединить двѣ точки двумя дугами большихъ круговъ, дополняющихъ другъ друга до 2π. Изъ нихъ, правда, только одна, содержащаяся между 0 и π, представляетъ собою въ то же время кратчайшую линію между обѣими точками.

Но, если мы откажемся отъ этого послѣдняго требованія, то мы придемъ къ сферическимъ треугольникамъ болѣе общаго вида, стороны которыхъ не должны непремѣнно, какъ выше, содержаться между 0 и π, а могутъ быть также заключены между 0 и 2π. Въ связи съ этимъ представляется цѣлесообразнымъ ввести еще дальнѣйшее обобщеніе, именно допустить также сверхъ-тупые углы [1]).

Это обобщеніе понятія о треугольникѣ ведетъ свое начало отъ Мёбіуса (Moebius), и мы будемъ поэтому такіе треугольники называть впредь треугольниками Мёбіуса *).

2. Относительно необходимости такого обобщенія самъ Мёбіусъ высказывается слѣдующимъ образомъ (Ges. Werke II, p. 74):

„Дѣйствительно, только вводя понятіе о сферическомъ треугольникѣ въ наибольшей его общности, можно достигнуть полнаго согласія между формулами, съ одной стороны, и построеніями, съ другой стороны. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ числа трехъ сторонъ и трехъ угловъ треугольника даны три элемента и требуется найти четвертый, то при помощи соотвѣтствующей формулы всегда можно найти, вообще говоря, два различныхъ значенія; и въ полномъ согласіи съ этимъ по тремъ даннымъ элементамъ, если мы допускаемъ сверхъ-тупые углы и стороны, всегда можно построить два различныхъ треугольника, въ одномъ изъ которыхъ мы всегда находимъ одно, а въ другомъ другое значеніе элемента изъ найденныхъ при помощи упомянутой формулы; между тѣмъ, если мы присоединимъ произвольное само по себѣ условіе, чтобы ни одна сторона и ни одинъ уголъ не превышали π, то въ большинствѣ случаевъ мы получимъ для четвертаго элемента только одно изъ двухъ значеній, которыя даетъ формула.

Если, напримѣръ, въ сферическомъ треугольникѣ ABC даны двѣ стороны a, b и заключенный между ними уголъ γ, и намъ нужно найти третью сторону c, то послѣдней служитъ либо одна, либо другая изъ двухъ частей, на которую точки A и B дѣлятъ проходящую черезъ нихъ

[1]) Т. е. углы, большіе π.

*) Moebius, Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik, 1846. Entwicklung der Grundformeln der Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit, 1860. Vgl. Ges. Werke II.

окружность большого круга; эта сторона имѣетъ поэтому два значенія, дополняющія другъ друга до 2π. Съ другой стороны, сторона c опредѣляется по элементамъ a, b и γ при помощи формулы:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma.$$

Такъ какъ дуга c опредѣляется такимъ образомъ по косинусу, то и эта формула даетъ для c два значенія, сумма которыхъ равна 2π.

Или, если по тѣмъ же элементамъ a, b, γ нужно опредѣлить уголъ α, то мы получаемъ, — смотря по тому, примемъ ли мы за третью сторону c, какъ одну изъ сторонъ угла α, ту или другую изъ двухъ дугъ AB, дополняющихъ другъ друга до цѣлой окружности, — два угла, отличающихся другъ отъ друга на π; эти углы имѣютъ одну общую сторону, а вторыя стороны одного и другого угла направлены по окружности большого круга, проходящаго черезъ A и B въ противоположныхъ направленіяхъ: отсчитывать же самые углы необходимо отъ стороны AC въ одномъ и томъ же направленіи. Въ полномъ согласіи съ этимъ находится формула

$$\sin b \operatorname{cotg} a - \sin\gamma \operatorname{cotg} \alpha = \cos b \cos\gamma,$$

связывающая элементы a, b, γ и α; уголъ α опредѣляется при этомъ своимъ тангенсомъ, а мы знаемъ, что каждому тангенсу отвѣчаютъ два угла, отличающіеся другъ отъ отъ друга на π".

3. Такъ говоритъ Мёбіусъ. Къ этому мы прибавимъ слѣдующее соображеніе, особенно важное для насъ:

Если мы будемъ допускать стороны и углы произвольной величины, то мы получимъ, по существу, тѣ же треугольники Мёбіуса, если мы условимся считать стороны и углы, отличающіеся другъ отъ друга на кратныя 2π, т. е. сравнимые по модулю 2π, за равные; такое соглашеніе находитъ себѣ оправданіе въ томъ, что тригонометрическія функціи такихъ сторонъ и угловъ, каковыя въ конечномъ счетѣ только имѣютъ для насъ значеніе, дѣйствительно равны между собой.

4. Чтобы при той точкѣ зрѣнія, на которой мы теперь стоимъ, однозначно опредѣлять дуги и углы, необходимо установить слѣдующее соглашеніе.

На каждой дугѣ большого круга мы будемъ считать установленнымъ нѣкоторое направленіе, которое мы будемъ принимать за положительное; противоположное же направленіе мы будемъ считать отрицательнымъ.

Въ этомъ предположеніи пусть стороны a, b, c треугольника будутъ опредѣлены такимъ образомъ, чтобы мы отъ B къ C, отъ C къ A и отъ A къ B постоянно переходили въ положительномъ направленіи (табл. I) *).

*) Треугольники на таблицѣ I—III начерчены въ стереографической проекціи (§ 37).

Если на окружности большого круга, на которомъ установлено положительное направленіе, лежатъ точки $A, B, C, \ldots, P, Q$, то въ какомъ бы порядкѣ эти точки ни были расположены, всегда имѣетъ мѣсто слѣдующее соотношеніе

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \ldots + \widehat{PQ} \equiv \widehat{AQ} \quad (\text{mod. } 2\pi),$$
$$\widehat{AB} + \widehat{BA} = 2\pi.$$

При точкѣ зрѣнія Мёбіуса эти общія уравненія могутъ быть замѣнены болѣе частными:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \ldots + \widehat{PQ} = \widehat{AQ},$$
$$\widehat{AB} = -\widehat{BA}.$$

5. Если мы выбрали двѣ окружности большихъ круговъ a и b и желаемъ опредѣлить образуемый ими уголъ, то нужно прежде всего установить, какую изъ двухъ точекъ ихъ пересѣченія мы желаемъ принимать за вершину (вторая точка пересѣченія называется „противоположной вершиной"). Далѣе, на сферѣ нужно установить сторону того вращенія, которое мы будемъ считать положительнымъ; противоположное вращеніе принимается тогда за отрицательное.

Въ этомъ предположеніи мы будемъ подъ угломъ (ab) разумѣть тотъ уголъ, на который нужно, стоя на сферѣ въ вершинѣ угла, повернуть вокругъ нея положительное направленіе въ окружности a въ сторону положительнаго вращенія, пока она не совмѣстится съ положительнымъ направленіемъ въ окружности b.

Вращеніе на сферѣ называется правостороннимъ, если положительное вращеніе совершается по часовой стрѣлкѣ, а въ противоположномъ случаѣ оно называется лѣвостороннимъ.

Если окружности большихъ круговъ $a, b, c, \ldots, p, q$ проходятъ всѣ черезъ однѣ и тѣ же двѣ точки, то, въ какомъ бы порядкѣ окружности ни были расположены, всегда имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$(ab) + (bc) + \ldots + (pq) \equiv (aq) \quad (\text{mod. } 2\pi),$$
$$(ab) + (ba) = 2\pi.$$

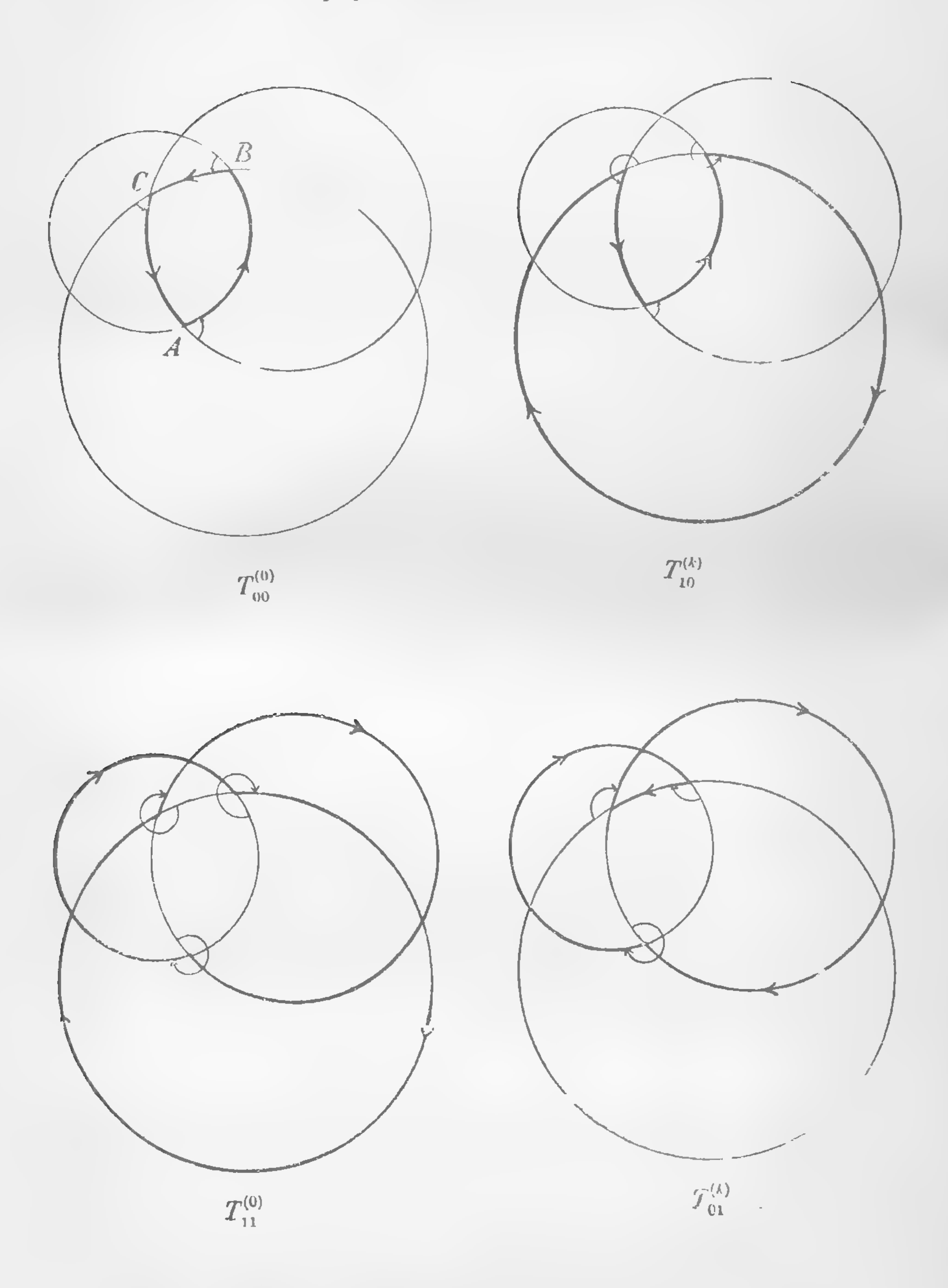
При точкѣ зрѣнія Мёбіуса эти общія уравненія могутъ быть замѣнены болѣе частными:

$$(ab) + (bc) + \ldots + (pq) = (aq),$$
$$(ab) = \quad (ba).$$

Если мы измѣнимъ положительное направленіе на одной изъ двухъ окружностей на противоположное, то уголъ (ab) переходитъ въ $\pi + (ab)$. Одновременное измѣненіе обоихъ направленій оставляетъ уголъ безъ перемѣны.

Таблица Ia.

Треугольники Мёбіуса.

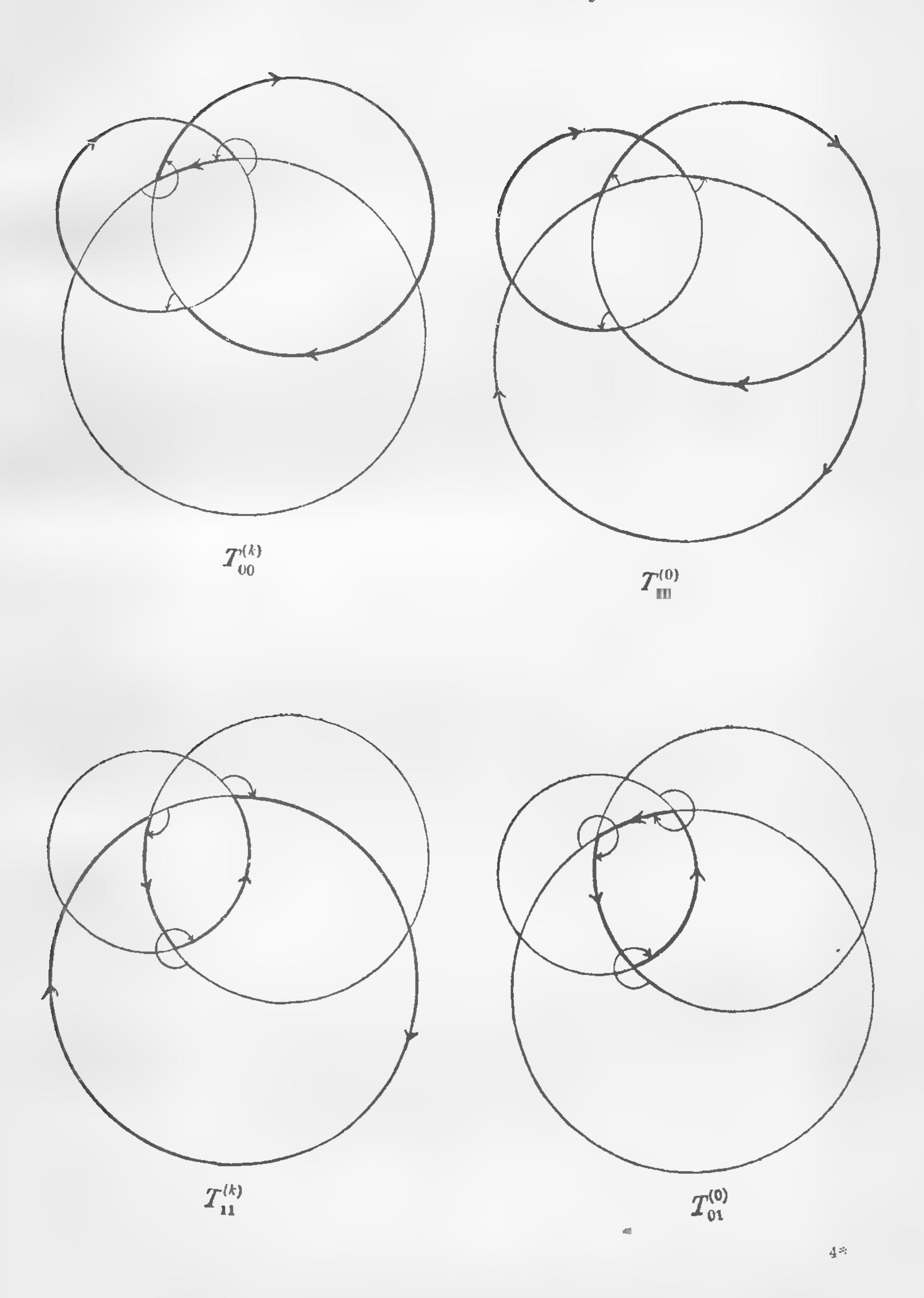


$T_{00}^{(0)}$ $T_{10}^{(k)}$

$T_{11}^{(0)}$ $T_{01}^{(k)}$

Таблица Ib.

Треугольники Мёбіуса.



Напротивъ, уголъ (ab) переходитъ въ $2\pi - (ab)$, если мы мѣняемъ сторону положительнаго вращенія на сферѣ, или же если мы замѣщаемъ одну другою противоположныя вершины угла.

6. Углы сферическаго треугольника ABC мы опредѣляемъ вершинами A, B, C и равенствами:

$$\alpha = (bc),$$
$$\beta = (ca),$$
$$\gamma = (ab).$$

Три точки на сферѣ опредѣляютъ теперь 16 различныхъ треугольниковъ Мёбіуса. Въ самомъ дѣлѣ, на каждой изъ трехъ дугъ мы можемъ двумя способами выбрать положительное направленіе; направленіе вращенія на сферѣ можетъ быть также выбрано двумя способами; такимъ образомъ, получается $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ комбинацій.

Изъ этихъ 16 треугольниковъ 8 изображены на таблицѣ I-ой въ стереографической проекціи; остальные 8 получаются по „типу" (п. 7) изъ четырехъ среднихъ изображеній путемъ циклическихъ замѣщеній вершинъ. Въ каждомъ горизонтальномъ ряду второй, третій и четвертый треугольники получаются изъ перваго, если мы измѣнимъ направленіе соотвѣтственно на одной, на двухъ или на всѣхъ трехъ сторонахъ.

Верхній рядъ содержитъ треугольники, соотвѣтствующіе вращенію влѣво, нижній вращенію вправо.

Первый треугольникъ въ первой колоннѣ есть Эйлеровъ треугольникъ. Замѣтимъ, однако, что здѣсь за углы треугольника мы должны принимать углы, смежные съ тѣми, которые мы считали таковыми выше.

Мы будемъ отличать Эйлеровы треугольники и Эйлеровы обозначенія. Къ первымъ мы относимъ тѣ треугольники, углы и стороны которыхъ не превышаютъ π, независимо отъ того, придерживаемся ли мы обозначеній Эйлера или Мёбіуса. Эйлерово же обозначеніе, которое находитъ себѣ примѣненіе только въ Эйлеровыхъ же треугольникахъ, мы указали въ § 36-омъ; оно имѣетъ рѣшающее значеніе въ четвертомъ отдѣлѣ настоящей главы. Эйлеровъ треугольникъ въ Эйлеровомъ же обозначеніи мы будемъ называть „обыкновеннымъ" треугольникомъ.

7. Чтобы удобно обозначать всѣ 16 формъ треугольника, мы введемъ нѣкоторые символы. Относя къ сторонамъ a, b, c соотвѣтственно индексы $k = 1, 2, 3$, мы будемъ обозначать:

через $S_0^{(0)}$ треугольникъ, всѣ стороны и углы котораго заключаются между 0 и π;

„ $S_1^{(0)}$ треугольникъ, всѣ стороны и углы котораго заключаются между π и 2π;

черезъ $S_0^{(k)}$ треугольникъ, въ которомъ только k-ая сторона заключается между 0 и π;

„ $S_1^{(k)}$ треугольникъ, въ которомъ только k-ая сторона заключается между π и 2π.

Пусть символъ $W_\delta^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, 3;\ \delta = 0, 1)$ имѣетъ соотвѣтствующія значенія для угловъ.

Достаточно посмотрѣть на таблицу I, чтобы убѣдиться, что возможны только такія комбинаціи $S_\delta^{(i)} W_\varepsilon^{(h)}$ $(i, h = 0, 1, 2, 3;\ \delta, \varepsilon = 0, 1)$, въ которыхъ $i = h$; случаямъ же $i \neq h$ не соотвѣтствуютъ никакія формы треугольниковъ.

Всѣ возможные 16 формъ треугольниковъ Мёбіуса содержатся, такимъ образомъ, въ символѣ $S_\delta^{(i)} W_\varepsilon^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, 3;$ $\delta, \varepsilon = 1, 2)$.

Для такого треугольника мы впредь будемъ пользоваться болѣе короткимъ обозначеніемъ $T_{\delta\varepsilon}^{(i)}$, которое и будемъ называть „типомъ“ треугольника, а знакъ i мы будемъ называть „индексомъ“ треугольника.

Нижеслѣдующая таблица, въ которой указаны предѣлы сторонъ и угловъ каждаго типа, будетъ намъ часто полезна:

Типы:	a	b	c	α	β	γ
$T_{00}^{(0)}$	$0, \pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$0, \pi$
$T_{01}^{(0)}$	$0, \pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$
$T_{10}^{(0)}$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$0, \pi$
$T_{11}^{(0)}$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$
$T_{00}^{(1)}$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$
$T_{01}^{(1)}$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$0, \pi$
$T_{10}^{(1)}$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$
$T_{11}^{(1)}$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$0, \pi$
$T_{00}^{(2)}$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$
$T_{01}^{(2)}$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$
$T_{10}^{(2)}$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$
$T_{11}^{(2)}$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$
$T_{00}^{(3)}$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$
$T_{01}^{(3)}$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$
$T_{10}^{(3)}$	$0, \pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$
$T_{11}^{(3)}$	$0, \pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$

Два характерныхъ свойства треугольника Мёбіуса заключаются въ слѣдующемъ (ср. § 36, 6):

a) Стороны и углы треугольника Мёбіуса заключаются между 0 и 2π.

b) Три точки на поверхности сферы опредѣляютъ 16 треугольниковъ Мёбіуса, если никакія двѣ изъ этихъ точекъ не расположены діаметрально.

8. Чтобы и для треугольниковъ Мёбіуса сохранить соотвѣтствіе между треугольникомъ и проектирующимъ его трехграннымъ угломъ, нужны дальнѣйшія соглашенія относительно угловъ между прямыми и плоскостями.

На каждой прямой мы будемъ считать установленнымъ опредѣленное направленіе, которое будемъ принимать за положительное; противоположное направленіе считается тогда отрицательнымъ. Если на такого рода прямой лажатъ точки $A, B, C, \ldots, P, Q$, то, какъ бы онѣ ни были расположены, всегда имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$AB + BC + \ldots + PQ = AQ,$$
$$AB + BA = 0.$$

Положимъ далѣе, что и каждой плоскости присвоены положительная и отрицательная стороны.

Подъ угломъ (g_1, g_2) между двумя пересѣкающимися прямыми g_1 и g_2 мы будемъ разумѣть тотъ уголъ, на который нужно, стоя съ положительной стороны плоскости $g_1 g_2$, повернуть въ сторону, обратную часовой стрѣлкѣ, положительное направленіе прямой g_1 для его совмѣщенія съ положительнымъ направленіемъ прямой g_2.

Если нѣсколько прямыхъ $g_1, g_2, \ldots, g_n$ проходятъ черезъ одну и ту же точку плоскости, то всегда имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$(g_1 g_2) + (g_2 g_3) + \ldots + (g_{n-1} g_n) \equiv (g_1 g_n) \pmod{2\pi},$$
$$(g_1 g_2) + (g_2 g_1) \equiv 0 \pmod{2\pi};$$

при этомъ для тригонометрическихъ величинъ сравненія всегда могутъ быть замѣщены равенствами.

Если прямыя g_1 и g_2 не расположены въ одной плоскости, то черезъ произвольную точку прямой g_2 мы проведемъ прямую g_1', параллельную прямой g_1, и тогда положимъ $(g_1 g_2) = (g_1' g_2)$.

Если мы на одной изъ прямыхъ измѣнимъ направленіе на противоположное, то уголъ $(g_1 g_2)$ переходитъ въ $\pi + (g_1 g_2)$.

Если мы замѣнимъ другъ другомъ положительную и отрицательную стороны плоскости, опредѣляемой прямыми g_1 и g_2 (или соотвѣтственно g_1' и g_2), то уголъ $(g_1 g_2)$ переходитъ въ $2\pi - (g_1 g_2)$.

Чтобы опредѣлить уголъ между двумя плоскостями ε_1 и ε_2, мы прежде всего установимъ положительное направленіе на прямой ихъ пересѣченія и обозначимъ положительныя нормали [2]), возставленныя къ плоскостямъ въ какой-либо точкѣ линіи ихъ пересѣченія, черезъ n_1 и n_2.

Подъ угломъ $(\varepsilon_1\varepsilon_2)$ плоскостей ε_1 и ε_2 мы будемъ въ такомъ случаѣ разумѣть уголъ (n_1n_2) между ихъ положительными нормалями. При этомъ за положительную сторону плоскости, опредѣляемой нормалями n_1 и n_2, нужно принимать ту, при которой установленное уже выше положительное направленіе линіи пересѣченія становится положительной нормалью.

9. Соотвѣтствіе между трехграннымъ угломъ и треугольникомъ устанавливается теперь слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ

черезъ r_a, r_b, r_c радіусы OA, OB, OC,
„ ε_a плоскость, опредѣляемую прямыми r_b и r_c,
„ ε_b „ „ „ r_c и r_a,
„ ε_c „ „ „ r_a и r_b;

тогда мы получаемъ соотношенія:

$$a = (r_b r_c), \quad \alpha = (\varepsilon_b \varepsilon_c),$$
$$b = (r_c r_a), \quad \beta = (\varepsilon_c \varepsilon_a),$$
$$c = (r_a r_b), \quad \gamma = (\varepsilon_a \varepsilon_b)$$

при слѣдующихъ соглашеніяхъ:

Если на сферѣ принято лѣвостороннее вращеніе, то за положительныя направленія прямыхъ r_a, r_b, r_c нужно принять

$$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC};$$

при правостороннемъ вращеніи должны быть приняты обратныя направленія *).

Если, далѣе, мы будемъ называть тѣ стороны плоскостей ε_a, ε_b, ε_c, которыя обращены внутрь тетраэдра $OABC$, „внутренними“ сторонами этихъ плоскостей, а другія „внѣшними“, то за положительную сторону плоскости ε_a нужно принять внутреннюю, если $0 < a < \pi$, и

---

[2]) Подъ положительными нормалями авторъ разумѣетъ перпендикуляры, возставленные съ положительной стороны плоскости.

*) Эти соглашенія не вполнѣ аналогичны тѣмъ, которыя приняты въ механикѣ (см. т. III); именно, если мы отождествимъ упоминаемую тамъ „положительную ось вращенія“ съ нашимъ „положительнымъ направленіемъ“ прямой r_a, то въ той постановкѣ, которая принята въ механикѣ, за правостороннее вращеніе пришлось бы считать какъ то, которое мы здѣсь принимаемъ за правостороннее, такъ и то, которое мы принимаемъ за лѣвостороннее.

внѣшнюю, если $\pi < a < 2\pi$; соотвѣтственныя соглашенія нужно установить для плоскостей ε_b, ε_c въ зависимости отъ сторонъ b и c.

Въ Эйлеровомъ треугольникѣ во всѣхъ трехъ плоскостяхъ за положительныя должны быть приняты внутреннія стороны. За положительныя направленія r_a, r_b, r_c нужно принять

$$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},$$

если точки A, B и C, когда мы смотримъ на нихъ изъ точки O, расположены въ направленіи движенія часовой стрѣлки (какъ на нашихъ фигурахъ — см., въ частности, ниже фиг. 34); въ противномъ случаѣ нужно принять противоположныя стороны за положительныя. Въ первомъ случаѣ мы говоримъ, что точки O, A, B, C образуютъ „правую систему“, во второмъ — „лѣвую“ (ср. § 84, 3). При нашихъ соглашеніяхъ въ Эйлеровомъ треугольникѣ правому направленію отвѣчаетъ на сферѣ лѣвая система $OABC$ и обратно.

10. Тетраэдръ $OABC$ мы будемъ называть сопряженнымъ съ треугольникомъ ABC. Точку O мы будемъ принимать за вершину, а A, B и C — за конечныя точки его реберъ. Объемъ тетраэдра мы будемъ считать положительнымъ, если за положительное направленіе реберъ приняты

$$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},$$

и если въ то же время точки O, A, B, C образуютъ правую систему, или же если при противоположныхъ направленіяхъ реберъ конечныя точки образуютъ лѣвую систему. Въ двухъ другихъ случаяхъ мы будемъ считать объемъ тетраэдра отрицательнымъ.

§ 39. Полюсъ и поляра.

1. Окружности большихъ круговъ, пересѣкающія перпендикулярно одну данную окружность большого круга, проходятъ всѣ черезъ двѣ діаметральныя точки, которыя называются полюсами данной окружности.

Если на нашей окружности установлено опредѣленное направленіе, согласно § 38, то наблюдатель, движущійся по этой окружности въ положительномъ направленіи, видитъ одинъ полюсъ съ лѣвой стороны, а другой съ правой.

Подъ „положительнымъ полюсомъ“ окружности большого круга мы будемъ разумѣть правый или лѣвый полюсъ, смотря по тому, установлено ли на сферѣ правое или лѣвое вращеніе. Второй полюсъ мы будемъ называть „отрицательнымъ полюсомъ“ или „противоположнымъ полюсомъ“.

2. Дуги, соединяющія точку на окружности большого круга съ ея полюсомъ, представляютъ собой квадранты. Сообразно этому полюсъ данной окружности большого круга можно находить, либо проводя нѣсколько перпендикулярныхъ къ ней окружностей большихъ круговъ и опредѣляя точки ихъ пересѣченія, либо же проводя одну перпендикулярную окружность и откладывая на ней по квадранту по одну и другую сторону. Правый и лѣвый полюсъ устанавливаются тогда согласно п. 1.

3. Квадранты, выходящіе изъ одной точки на сферѣ, всѣ оканчиваются на той же окружности. Если мы присвоимъ этой окружности такое направленіе, что данная точка будетъ служить для нея правымъ полюсомъ, то она называется „полярой“ данной точки.

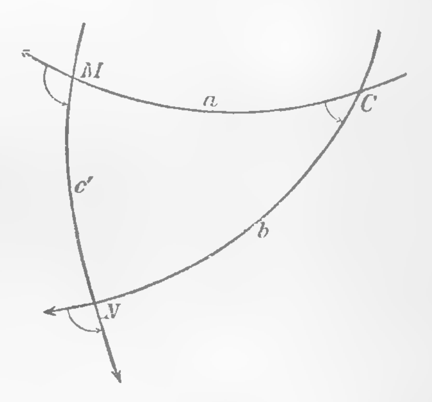
4. Окружности большихъ круговъ, выходящія изъ полюса, всѣ пересѣкаютъ поляру перпендикулярно. Поэтому, чтобы найти поляру данной точки, нужно либо провести изъ нея два квадранта и соединить конечныя ихъ точки окружностью большого круга, либо отложить одинъ квадрантъ и провести чрезъ конечную его точку окружность большого круга, къ нему перпендикулярную. Направленіе на полярѣ устанавливается согласно п. 3.

5. Пусть a и b будутъ двѣ окружности большихъ круговъ (фиг. 28) *) положительнаго направленія, образующія уголъ (ab) съ вершиной въ точкѣ C (§ 38, 5). Если на дугахъ a и b мы отложимъ отъ точки C въ положительномъ направленіи квадранты CM и CN и черезъ точки M и N проведемъ еще одну окружность большого круга c' и послѣдней присвоимъ такое направленіе, чтобы точка C была положительнымъ ея полюсомъ, то

$$(ab) = \widehat{MN}$$

и

$$(ac') = \frac{\pi}{2}, \quad (bc') = \frac{\pi}{2}.$$



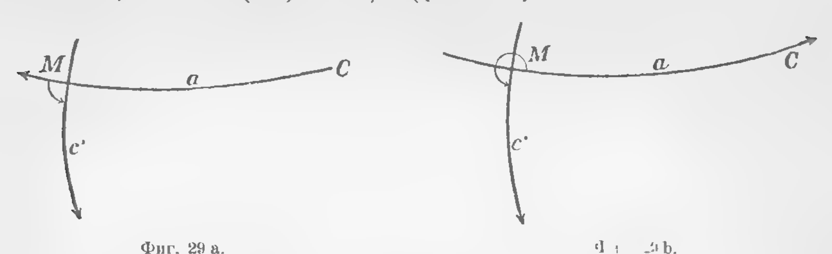
Фиг. 28.

6. Послѣднія равенства можно выразить также слѣдующимъ образомъ: если C есть положительный полюсъ окружности c' и a есть окружность большого круга, проходящая черезъ любую точку M окружности c', и

a) если при этомъ направленіе на окружности a устанавливается такъ, что $\widehat{CM} = \pi/2$, то и $\sphericalangle(ac') = \pi/2$ (фиг. 29a);

*) Всѣ фигуры этого параграфа имѣютъ только схематическій характеръ.

b) если направленіе на окружности a установлено такъ, что $\widehat{CM} = 3\pi/2$, то и $\measuredangle(ac') = 3\pi/2$ (фиг 29 b).



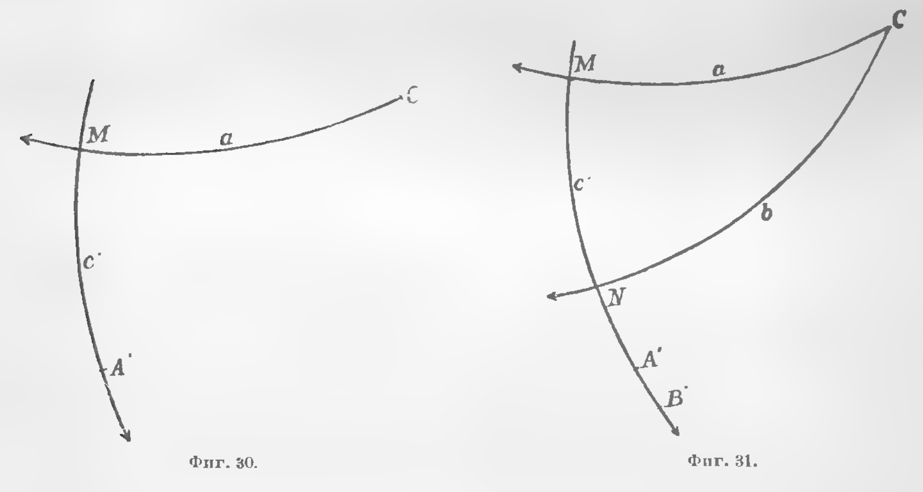
Фиг. 29 a. Фиг. 29 b.

Въ томъ и въ другомъ случаѣ $(ac') = \widehat{CM}$.

Предложеніе. Если C есть положительный полюсъ окружности большого круга c' и M есть произвольная точка на этой окружности, то, каково бы ни было направленіе окружности большого круга a, проходящей черезъ точки C и M, всегда имѣетъ мѣсто равенство $\measuredangle(ac') = \widehat{CM}$.

7. Если C и A' суть положительные полюсы двухъ окружностей большихъ круговъ c' и a, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ въ точкѣ M, то (фиг. 30)

$$(ac') = \widehat{CM}, \quad (c'a) = \widehat{A'M},$$



Фиг. 30. Фиг. 31.

а, слѣдовательно, такъ какъ $(ac') + (c'a) = 2\pi$, имѣетъ мѣсто также равенство

$$\widehat{CM} + \widehat{A'M} = 2\pi;$$

такъ какъ далѣе

$$\widehat{A'M} + \widehat{MA'} = 2\pi,$$

то

$$\widehat{CM} = \widehat{MA'}.$$

Предложеніе. Если C и A' суть положительные полюсы двухъ окружностей большихъ круговъ, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, то всегда

$$\widehat{CM} = \widehat{MA'}.$$

8. Предыдущее предложеніе приводитъ къ важнѣйшей теоремѣ въ теоріи поляръ. Если a, b суть двѣ окружности большихъ круговъ, A' и B' ихъ положительные полюсы, C положительный полюсъ окружности c' (фиг. 31), то

$$\widehat{CM} = \widehat{MA'}, \quad \widehat{CN} = \widehat{NB'};$$

а такъ какъ $\widehat{CM} = \widehat{CN} = \pi/2$, то отсюда слѣдуетъ, что

$$\widehat{MA'} = \widehat{NB'},$$

или

$$\widehat{MN} + \widehat{NA'} = \widehat{NA'} + \widehat{A'B'},$$

$$\widehat{MN} = \widehat{A'B'}.$$

Въ виду п. 5, отсюда слѣдуетъ:

$$(ab) = \widehat{A'B'}.$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующей основной теоремѣ въ теоріи поляръ:

Если A' и B' суть положительные полюсы двухъ окружностей большихъ круговъ a и b, а C есть одна изъ точекъ ихъ пересѣченія, а потому представляетъ собой также одинъ изъ полюсовъ окружности большого круга c', проходящей черезъ точки A' и B', если, далѣе, мы выберемъ направленіе послѣдней окружности такъ, чтобы точка C была ея положительнымъ полюсомъ, то всегда

$$(ab) = A'B'.$$

9. Изъ предложенія п. 8 вытекаетъ слѣдующее двойное предложеніе:

Если окружность большого круга вращается вокругъ нѣкоторой точки на сферѣ въ положительную сторону, то ея положительный полюсъ движется по полярѣ этой точки также въ положительномъ направленіи.

Если точка движется въ положительномъ направленіи по окружности большого круга, то ея поляра вращается вокругъ полюса этой окружности также въ положительную сторону.

По формулировкѣ своей эти предложенія покрываются предложеніями, выведенными совершенно иначе, относительно полюса и поляры коническаго сѣченія.

10. Эту аналогію можно провести и дальше. Въ планиметріи двѣ плоскости η и η', наложенныя одна на другую, считаются взаимно-полярными, если каждой точкѣ P плоскости η отнесена прямая p' на плоскости η' такъ, что каждой прямой g, проходящей на плоскости η черезъ точку P, отвѣчаетъ на плоскости η' точка G', лежащая на прямой p'; аналогично этому мы можемъ представить себѣ и сферу покрывающей себя самое въ видѣ двойнаго слоя и установить:

Двѣ (совпадающія) сферы K и K' считаются „полярно сопряженными", если каждой точкѣ P на сферѣ K отнесена окружность большого круга p' на сферѣ K', при чемъ каждой окружности большого круга h, проходящей черезъ точку P, всегда отвѣчаетъ на сферѣ K' точка H, лежащая на окружности p'.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что такого рода зависимость будетъ установлена, коль скоро мы каждой точкѣ сферы (считая ее принадлежащей сферѣ K) отнесемъ ея поляру (считая ее принадлежащей сферѣ K').

Этимъ путемъ принципъ двойственности, оказавшійся столь плодотворнымъ въ планиметріи, переносится на сферу.

Цѣлесообразно принимать, что двѣ точки на сферѣ опредѣляютъ двѣ окружности большихъ круговъ, отличающіяся одна отъ другой своимъ направленіемъ. Тогда мы имѣемъ два взаимно-полярныя предложенія:

Двѣ точки на сферѣ опредѣляютъ двѣ окружности большихъ круговъ, на которыхъ онѣ лежатъ.	Двѣ окружности большихъ круговъ опредѣляютъ на сферѣ двѣ точки пересѣченія, черезъ которыя онѣ проходятъ.

Каждой окружности [3]), о которой идетъ рѣчь съ лѣвой стороны, отвѣчаетъ справа въ качествѣ соотвѣтствующей ей точки вполнѣ опредѣленная точка--именно, ея положительный полюсъ, и обратно.

Измѣненіе направленія на окружности большого круга и замѣщеніе полюса противоположнымъ полюсомъ являются процессами взаимно полярными. Такъ какъ, съ другой стороны, замѣщеніе полюса противоположнымъ полюсомъ, какъ мы видѣли въ § 38, 5, оказываетъ то же дѣйствіе, что и измѣненіе стороны вращенія на сферѣ, то мы можемъ сказать:

Измѣненіе направленія на окружностяхъ большихъ круговъ и измѣненіе стороны вращенія являются взаимно-полярными процессами. Это намъ понадобится ниже.

[3]) Мы иногда будемъ говорить просто „окружность" вмѣсто окружность большого круга тамъ, гдѣ это не можетъ вызвать недоразумѣнія.

11. Если K и K' суть двѣ совпадающія сферы, полярно отнесенныя одна къ другой, и точка P описываетъ произвольную кривую s на сферѣ K, то окружность p' описываетъ на сферѣ K' непрерывный рядъ окружностей, которыя „огибаютъ кривую S, полярную къ кривой s". Если Q есть нѣкоторая опредѣленная точка на кривой s, а точка P неограниченно приближается къ Q, то окружность большого круга PQ обращается въ сферическую касательную къ кривой s въ точкѣ Q. Ей отвѣчаетъ опредѣленная точка S (направленіе!) — точка касанія окружности q', соотвѣтствующей точкѣ Q.

Если окружность большого круга имѣетъ съ кривой s n общихъ точекъ, то послѣднимъ отвѣчаютъ n касательныхъ кривой S. При этомъ двѣ совпадающія окружности противоположнаго направленія нужно всегда считать различными (10).

Этимъ путемъ каждой фигурѣ на сферѣ можетъ быть отнесена полярная ей фигура, — каждому предложенію на сферѣ отвѣчаетъ второе предложеніе, относящееся къ полярной фигурѣ.

12. Если k есть окружность малаго круга на сферѣ, а m — параллельная ей окружность большого круга, то тотъ полюсъ M окружности m, который лежитъ на меньшемъ сегментѣ, называется „сферическимъ центромъ" окружности k. Если мы будемъ соединять точки окружности k дугами большихъ круговъ съ точкой M, то послѣднія, какъ это очень легко обнаружить, равны и потому называются „сферическими радіусами" окружности k.

Мы предоставляемъ читателю доказать слѣдующія предложенія:

Каждой окружности малаго круга на сферѣ въ полярной фигурѣ всегда отвѣчаетъ другая окружность, плоскость которой параллельна первоначальной.

Сферическіе радіусы двухъ взаимно-полярныхъ окружностей дополняютъ другъ друга до $\pi/2$.

13. Особеннаго вниманія заслуживаютъ фигуры, которыя ограничены дугами большихъ круговъ, такъ называемые сферическіе многоугольники.

Легко видѣть, что вершинамъ сферическаго многоугольника въ полярной фигурѣ отвѣчаютъ ихъ поляры, сторонамъ же — ихъ полюсы. Въ виду этого п. 8 приводитъ къ слѣдующему важному предложенію.

Стороны сферическаго многоугольника равны угламъ полярнаго многоугольника, а углы многоугольника равны сторонамъ полярнаго многоугольника.

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ новаго рода двойственной зависимости между сторонами и углами многоугольника; эта зависимость отличается отъ начала двойственности,

съ которымъ мы познакомились въ планиметріи, своимъ метрическимъ характеромъ; каждой метрической зависимости между сторонами и углами сферическаго многоугольника всегда отвѣчаетъ другая, въ которой стороны и углы замѣщаются другъ другомъ.

Впредь мы будемъ для краткости говорить о двухъ взаимно-полярныхъ фигурахъ или формулахъ, что онѣ получаются одна изъ другой посредствомъ „полярнаго преобразованія".

14. Для насъ важную роль будетъ играть, главнымъ образомъ, полярное преобразованіе треугольника. Изъ двухъ взаимно полярныхъ треугольниковъ каждый называется относительно другого его полярнымъ треугольникомъ. Стороны и углы двухъ такихъ треугольниковъ ABC и $A'B'C'$ связаны зависимостями:

$$a \quad \alpha', \quad \alpha \quad a',$$
$$b = \beta', \quad \beta = b',$$
$$c \quad \gamma', \quad \gamma \quad c'.$$

Изъ п. 12 легко вывести предложеніе:

Окружность, описанная около сферическаго треугольника (вписанная въ сферическій треугольникъ), переходитъ при полярномъ преобразованіи въ окружность, вписанную въ полярный треугольникъ (описанную около полярнаго треугольника). Сферическіе радіусы обѣихъ окружностей дополняютъ другъ друга до $\pi/2$.

15. Если мы представимъ себѣ стереографическую проекцію окружности большого круга, то, согласно п. 2 и въ виду § 37, 4 и 5, можно найти проекціи его полюсовъ, если построить двѣ вспомогательныя окружности, каждая изъ которыхъ дѣлитъ пополамъ экваторъ и пересѣкаетъ данную окружность ортогонально; точки ихъ пересѣченія и будутъ искомыми проекціями. За одну изъ этихъ вспомогательныхъ окружностей лучше всего принять прямую, соединяющую центръ экватора съ центромъ данной окружности, а центръ второй вспомогательной окружности удобнѣе всего взять на этой прямой.

Такимъ образомъ, по стереографической проекціи сферическаго треугольника можно найти стереографическую проекцію полярнаго треугольника. Такъ какъ, съ другой стороны, углами полярнаго треугольника служатъ стороны первоначальнаго треугольника, а стереографическая проекція представляетъ собой конформное преобразованіе, то отсюда слѣдуетъ:

Если сферическій треугольникъ заданъ въ стереографической проекціи, то указаннымъ геометрическимъ построеніемъ мы имѣемъ возможность найти дѣйствительную величину его сторонъ.

B. Формулы перваго порядка.

§ 40. Введеніе. Теорема о проекціяхъ.

1. Предыдущія соображенія, носившія преимущественно топографическій характеръ, принадлежали сферической геометріи; обращаясь теперь къ вычисленіямъ, мы вступаемъ, такимъ образомъ, въ область собственно сферической тригонометріи.

2. Изъ каждой тригонометрической формулы можно получить дальнѣйшія формулы циклическимъ перемѣщеніемъ и полярнымъ преобразованіемъ.

Циклическое перемѣщеніе заключается въ томъ, что мы замѣщаемъ каждую изъ сторонъ a, b, c слѣдующей и въ то же время каждый изъ угловъ α, β, γ слѣдующимъ, а послѣдній элементъ первымъ. Изъ каждой формулы сферической тригонометріи мы можемъ обыкновенно циклическимъ перемѣщеніемъ получить двѣ другія формулы. Однако, иногда эти три формулы сливаются въ одну.

Путемъ полярнаго преобразованія (§ 39, 14) мы изъ каждой формулы сферической тригонометріи получаемъ новую формулу, въ которой стороны замѣщены соотвѣтствующими углами, и обратно; иногда преобразованная такимъ образомъ формула совпадаетъ съ первоначальной.

3. Основной теоремой сферической тригонометріи является такъ называемая теорема косинусовъ на сферѣ и именно потому, что изъ нея можно вывести всѣ формулы сферической тригонометріи (за исключеніемъ знака при нѣкоторыхъ выраженіяхъ) безъ геометрическихъ соображеній, т. е. чисто гоніометрически — фактъ, котораго нельзя не подчеркнуть.

Однако, между формулами, которыя могутъ быть такимъ образомъ выведены, обнаруживается глубокое различіе. Именно, въ то время, какъ для одной группы этихъ формулъ оказывается достаточнымъ то понятіе о сферическомъ треугольникѣ, которое установлено Мёбіусомъ, мы будемъ вынуждены для другой группы снова еще существенно расширить это понятіе.

Сообразно этому мы будемъ различать формулы перваго порядка, т. е. тѣ, которыя относятся къ треугольникамъ Мёбіуса, и формулы второго порядка, т. е. тѣ, для которыхъ понятіе о сферическомъ треугольникѣ, установленное Мёбіусомъ, уже недостаточно.

Первыя выведены въ настоящемъ второмъ отдѣлѣ, а вторыя въ третьемъ отдѣлѣ.

4. Какъ въ плоской тригонометріи теорема косинусовъ представляетъ раціональную зависимость между тремя сторонами и косинусомъ

одного угла, такъ и въ сферической тригонометріи теорема косинусовъ представляетъ собою раціональную зависимость между тригонометрическими функціями трехъ сторонъ и косинусомъ одного угла. Дѣло сводится, такимъ образомъ, къ тому, чтобы выразить, скажемъ, $\cos\gamma$ раціонально при помощи тригонометрическихъ функцій сторонъ a, b, c.

Въ примѣненіи къ треугольнику Эйлера, на первый взглядъ, представляется наиболѣе естественнымъ привести эту задачу къ задачѣ плоской тригонометріи слѣдующимъ образомъ. Въ точкѣ C проведемъ касательныя къ сторонамъ a и b, которыя пересѣкутъ прямыя OA и OB, скажемъ, въ точкахъ A и B. Такимъ образомъ мы получимъ тетраэдръ $OC\overline{A}B$, въ которомъ плоскими углами служатъ стороны a, b, c, ACB есть γ, ребро OC равно r; отсюда уже легко получить искомую зависимость.

5. Этимъ путемъ дѣйствительно шелъ Эйлеръ въ указанномъ выше сочиненіи. Но легко убѣдиться, что этотъ выводъ остается въ силѣ только для Эйлеровыхъ треугольниковъ. Чтобы показать, что полученныя формулы сохраняютъ силу и для треугольниковъ Мёбіуса, необходимо особое и притомъ пространное дополнительное доказательство.

Поэтому мы предпочитаемъ такое доказательство, которое непосредственно примѣняется во всей своей общности къ треугольникамъ Мёбіуса *).

Третій выводъ, правда, примѣнимый опять-таки только къ треугольникамъ Эйлера, мы получимъ ниже попутно, какъ результатъ, проистекающій изъ формулъ прямоугольнаго треугольника (§ 54, 2).

6. Прежде всего мы приведемъ здѣсь нѣсколько вспомогательныхъ предложеній, при чемъ мы будемъ придерживаться соглашеній, установленныхъ въ § 38, 8.

a) Пусть l и g_1 будутъ двѣ прямыя, которымъ присвоены положительныя направленія; если $AA_1 = s_1$ есть отрѣзокъ на прямой g_1, то подъ проекціей отрѣзка s_1 на прямую l мы будемъ разумѣть по величинѣ и знаку произведеніе (§ 34, 3)

$$p_1 \quad s_1 \cos(lg_1).$$

b) Если мы опустимъ изъ точекъ A и A_1 перпендикуляры на прямую l, которые встрѣтятъ послѣднюю въ точкахъ A' и A_1', то простыя геометрическія соображенія обнаруживаютъ:

Проекція отрѣзка AA_1 на прямую l по величинѣ и знаку равна отрѣзку $A_1'A'$ [4]):

$$p_1 = s_1' \quad A'A_1'.$$

*) Moebius, Über eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik. Ges. Werke, II, p. 22 ff.

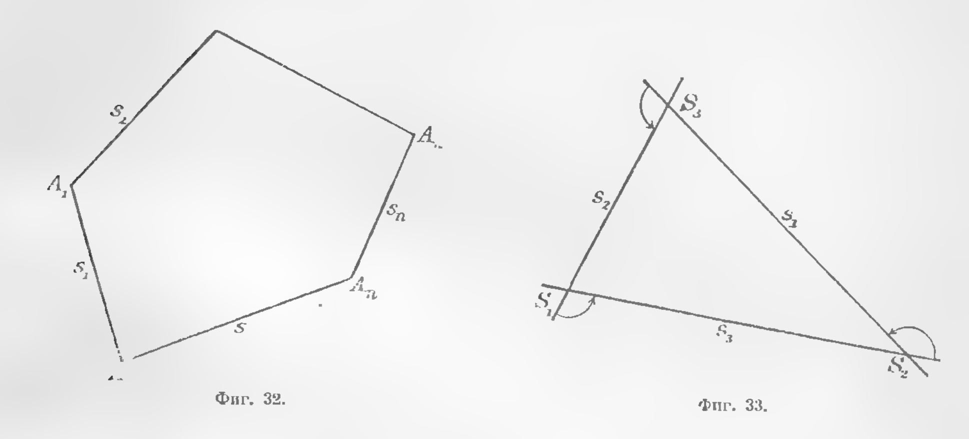
[4]) Опредѣляя знакъ отрѣзка $A'A_1'$, нужно сообразоваться съ положительнымъ направленіемъ оси l.

c) Если $AA_1A_2 \ldots A_n$ есть ломанная, состоящая изъ отрѣзковъ $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то ея проекція p равна проекціи s' отрѣзка $s = AA_n$.

Въ самомъ дѣлѣ, по § 38, 8,

$$p = s_1 \cos(lg_1) + s_2 \cos(lg_2) + \ldots + s_n \cos(lg_n)$$
$$= A'A_1' + A_1'A_2' + \ldots + A_{n-1}'A_n' = A'A_n' = s'.$$

d) Если A совпадаетъ съ A_n, то отсюда вытекаетъ (фиг. 32):



Фиг. 32. Фиг. 33.

Теорема о проекціяхъ. Проекція каждой замкнутой ломанной линіи равна нулю: $\Sigma s_n \cos(lg_n) = 0$.

e) Въ частности, для плоскаго треугольника $S_1S_2S_3$ (фиг. 33):

$$s_1 \cos(ls_1) + s_2 \cos(ls_2) + s_3 \cos(ls_3) = 0.$$

Но по теоремѣ синусовъ плоской геометріи

$$s_1 : s_2 : s_3 = \sin(s_2 s_3) : \sin(s_3 s_1) : \sin(s_1 s_2).$$

Поэтому послѣдняя формула принимаетъ для плоскаго треугольника видъ:

$$\sin(s_2 s_3) \cos(ls_1) + \sin(s_3 s_1) \cos(ls_2) + \sin(s_1 s_2) \cos(ls_3) = 0.$$

§ 41. Теорема косинусовъ на сферѣ.

1. Положимъ, что треугольнику Мёбіуса общаго вида ABC отнесенъ, въ смыслѣ соглашеній и обозначеній § 38, 8, трехгранный уголъ.

Отъ точки C*) на сторонахъ a и b мы отложимъ въ положительномъ направленіи квадранты CM и CN и черезъ точки M и N проведемъ новую окружность большого круга, направленіе которой выберемъ

*) Ср. фиг. 28.

такимъ образомъ, чтобы точка C была ея положительнымъ полюсомъ. Тогда, согласно § 39, 5:

$$MN = \gamma$$
$$CM = CN = \frac{\pi}{2}.$$

Положимъ, далѣе, $OM = r_m$ и $ON = r_n$ и установимъ на этихъ лучахъ положительное направленіе, какъ на лучахъ r_a, r_b, r_c.

Теперь, во-первыхъ, въ нѣкоторой плоскости, параллельной плоскости большого круга BCM, мы проведемъ прямыя, параллельныя прямымъ r_b, r_c, r_m такъ, чтобы онѣ составили треугольникъ. Если мы отождествимъ этотъ треугольникъ съ треугольникомъ $S_1S_2S_3$ предыдущаго параграфа, а прямую l съ r_a, то:

$$\left.\begin{aligned}
&(s_2s_3) = (r_cr_m) = CM = \frac{\pi}{2}, && (ls_1) = (r_ar_b) = AB = c,\\
&(s_3s_1) = (r_mr_b) = MB = MC + CB && (ls_2) = (r_ar_c) = AC = -b,\\
&\qquad = -\frac{\pi}{2} - a, && \\
&(s_1s_2) = (r_br_c) = BC = a, && (ls_3) = (r_ar_m) = AM.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Во-вторыхъ, въ нѣкоторой плоскости, параллельной плоскости большого круга CAN, мы проведемъ три прямыя, параллельныя прямымъ r_c, r , r_n, опять такимъ образомъ, чтобы онѣ образовали треугольникъ; если мы отождествимъ его съ треугольникомъ $S_1S_2S_3$, а прямую l съ r_m, то:

$$\left.\begin{aligned}
&(s_2s_3) = (r_ar_n) = AN = AC + CN && (ls_1) = (r_mr_c) = MC = \frac{\pi}{2},\\
&\qquad = -b + \frac{\pi}{2}, && \\
&(s_3s_1) = (r_nr_c) = NC = -\frac{\pi}{2}, && (ls_2) = (r_mr_a) = MA,\\
&(s_1s_2) = (r_cr_a) = CA = b, && (ls_3) = (r_mr_n) = MN = \gamma.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Вставляя теперь выраженія (1) и (2) въ послѣднее равенство § 40-го, мы получимъ уравненія:

$$\cos c - \cos a \cos b + \sin a \cos AM = 0,$$
$$-\cos MA + \sin b \cos \gamma = 0;$$

принимая же во вниманіе, что $\cos AM = \cos MA$, мы получимъ соотношеніе, справедливое для всякаго треугольника Мёбіуса:

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos \gamma.$$

При помощи циклическихъ перемѣщеній, мы получаемъ отсюда еще два соотношенія, которыя совмѣстно съ первымъ образуютъ

первую теорему косинусовъ на сферѣ:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha, \\ \cos b &= \cos c \cos a - \sin c \sin a \cos \beta, \\ \cos c &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos \gamma. \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

2. Полярнымъ преобразованіемъ мы отсюда получаемъ

вторую теорему косинусовъ на сферѣ:

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a, \\ \cos \beta &= \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha \cos b, \\ \cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c. \end{aligned}\right\} \quad \text{(I')}$$

Но принципіальное значеніе имѣетъ тотъ фактъ, что (см. § 40, 3) формулы (I′) могутъ быть выведены изъ формулъ (I) чисто гоніометрически, какъ это и будетъ сдѣлано въ § 42. Это даетъ, такимъ образомъ, чисто аналитическое доказательство существованія „полярнаго треугольника" для каждаго даннаго треугольника, т. е. такого треугольника, въ которомъ сторонами служатъ углы даннаго треугольника, а углами его стороны [5]).

§ 42. Теорема синусовъ на сферѣ и синусъ Штаудта.

1. Первое изъ соотношеній (I) можно представить въ видѣ:

$$\cos \alpha = \frac{\cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Возвышая обѣ части этого равенства въ квадратъ, замѣняя въ числителѣ квадраты синусовъ квадратами косинусовъ посредствомъ соотношенія $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и полагая:

$$D^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c, \qquad (1)$$

мы получимъ непосредственно и при помощи циклическихъ перемѣщеній соотношенія:

$$\sin^2 \alpha = \frac{D^2}{\sin^2 b \sin^2 c}, \quad \sin^2 \beta = \frac{D^2}{\sin^2 c \sin^2 a}, \quad \sin^2 \gamma = \frac{D^2}{\sin^2 a \sin^2 b}.$$

[5]) Замѣтимъ, что этотъ выводъ можно было бы считать безупречнымъ лишь въ томъ случаѣ, если было бы доказано, что всякій разъ, какъ даны шесть элементовъ $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, связанные соотношеніемъ (I), можно построить сферическій треугольникъ со сторонами a, b, c и углами α, β, γ, т. е. если бы была доказана теорема, обратная первой теоремѣ косинусовъ.

Отсюда мы получаемъ соотношеніе:

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 \alpha = \sin^2 c \sin^2 a \sin^2 \beta = \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 \gamma = D^2. \quad (2)$$

При помощи полярнаго преобразованія мы получаемъ изъ соотношеній (1) и (2) два другихъ:

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma; \quad (1')$$

$$\sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 a = \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \sin^2 b = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 c = \Delta^2. \quad (2')$$

По таблицѣ, приведенной на стр. 53, три произведенія $\sin b \sin c \sin \alpha$ $\sin c \sin a \sin \beta$, $\sin a \sin b \sin \gamma$, съ одной стороны, и $\sin \beta \sin \gamma \sin a$, $\sin \gamma \sin \alpha \sin b$, $\sin \alpha \sin \beta \sin c$, съ другой стороны, имѣютъ одинаковые знаки. Въ виду соотношеній (2) и (2′) мы можемъ поэтому положить:

$$D = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta = \sin a \sin b \sin \gamma,$$

$$\Delta = \sin \beta \sin \gamma \sin a = \sin \gamma \sin \alpha \sin b = \sin \alpha \sin \beta \sin c,$$

чѣмъ опредѣляются также знаки выраженій D и Δ.

Отсюда мы получаемъ:

$$D^2 = \sin^2 a \sin b \sin c \sin \beta \sin \gamma,$$

$$D \Delta = \sin a \sin b \sin c \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

и далѣе:

$$\frac{D}{\Delta} = \frac{\sin a}{\sin \alpha}, \quad \text{а также} \quad = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ ко второму основному предложенію сферической тригонометріи, къ теоремѣ синусовъ на сферѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{D}{\Delta}; \\ D = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta = \sin a \sin b \sin \gamma, \\ \Delta = \sin \beta \sin \gamma \sin a = \sin \gamma \sin \alpha \sin b = \sin \alpha \sin \beta \sin c. \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

2. Аналогія между этимъ предложеніемъ и теоремой синусовъ въ плоской геометріи совершенно ясна; вмѣсто фигурирующаго тамъ діаметра описанной окружности (§ 28, 3) здѣсь появляется отношеніе D/Δ.

Здѣсь естественно также возникаетъ вопросъ о геометрической интерпретаціи этой дроби; такую интерпретацію дѣйствительно далъ Штаудтъ (v. Staudt), который назвалъ выраженія D и Δ „синусами вершинъ".

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ сначала, что мы имѣемъ Эйлеровъ треугольникъ. Вычислимъ объемъ тетраэдра $OABC$, соотвѣтствующаго

этому треугольнику (§ 38, 10); площадь треугольника OAB по величинѣ и по знаку равна

$$OAB = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin c = {}^1/_2 r^2 \sin c.$$

Высота опредѣляется при помощи фигуры 34:

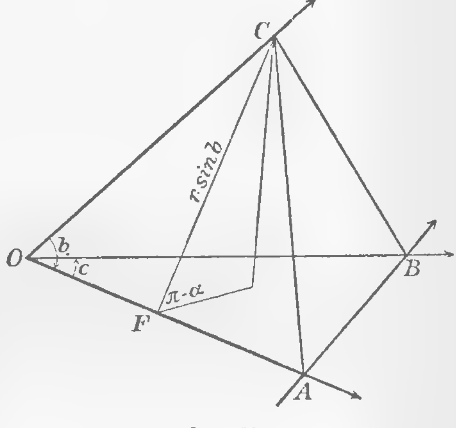
$$CF \sin(\pi - a) = r \sin b \sin a.$$

Поэтому объемъ равенъ

$$V = \frac{1}{6} r^3 \sin b \sin c \sin a,$$

или

$$6V = r^3 D. \qquad (3)$$



Фиг. 34.

Для треугольника Мёбіуса общаго вида остается еще невыясненнымъ, даетъ ли формула (3) правильно знакъ объема. Но, если мы сопоставимъ знакъ выраженія D въ формулахъ (II) въ различныхъ случаяхъ, сведенныхъ въ таблицѣ на стр. 53, со знакомъ, принадлежащимъ въ соотвѣтствующемъ случаѣ объему тетраэдра, какъ это слѣдуетъ изъ соглашенія § 38, 9 и 10, то мы найдемъ:

Формула (3) всегда правильно выражаетъ объемъ тетраэдра, сопряженнаго съ треугольникомъ Мёбіуса, по величинѣ и по знаку.

Для объема сопряженнаго полярнаго тетраэдра мы получаемъ:

$$6Y = r^3 \Delta. \qquad (3')$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы приходимъ къ слѣдующему предложенію:

Фигурирующее въ теоремѣ синусовъ отношеніе $D : \Delta$ по величинѣ и по знаку равно отношенію объемовъ сопряженнаго съ треугольникомъ тетраэдра и сопряженнаго полярнаго тетраэдра.

3. Мы удѣлимъ мѣсто еще одному замѣчательному преобразованію выраженій D и Δ, принадлежащему Стюди *).

*) Study, „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen". Leipzig, 1893. Это сочиненіе должно быть признано основнымъ по современной тригонометріи. Въ настоящемъ изложеніи введенію въ систему Стюди посвященъ отдѣлъ C.

Мы положимъ, какъ это дѣлаетъ Стюди:

$$\left.\begin{aligned} 2s_0 &= 2\pi - (a+b+c), & 2\sigma_0 &= 2\pi - (\alpha+\beta+\gamma),\\ 2s_1 &= -a+b+c, & 2\sigma_1 &= -\alpha+\beta+\gamma,\\ 2s_2 &= +a-b+c, & 2\sigma_2 &= +\alpha-\beta+\gamma,\\ 2s_3 &= +a+b-c, & 2\sigma_3 &= +\alpha+\beta-\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Тогда уравненіе (1) даетъ:

$$\begin{aligned} D^2 &= 1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\\ &= (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)-\cos^2 a\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\\ &= \sin^2 a\sin^2 b-\cos^2 a\cos^2 b-\cos^2 c+\cos c\cdot 2\cos a\cos b\\ &= -\cos(a+b)\cos(a-b)-\cos^2 c+\cos c\,[\cos(a-b)+\cos(a+b)]\\ &= [-\cos(a+b)+\cos c]\cdot[\cos(a-b)-\cos c]\\ &= 4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{c+b-a}{2}. \end{aligned}$$

Пользуясь же обозначеніемъ (4), мы найдемъ:

$$\begin{aligned} D^2 &= 4\sin s_0\sin s_1\sin s_2\sin s_3,\\ \Delta^2 &= 4\sin\sigma_0\sin\sigma_1\sin\sigma_2\sin\sigma_3. \end{aligned} \quad (5)$$

4. Намъ остается еще привести доказательство, о которомъ была рѣчь въ § 41, 2, что вторая теорема косинусовъ (I′) можетъ быть выведена изъ первой (I) безъ помощи полярныхъ треугольниковъ. Съ этою цѣлью замѣтимъ прежде всего, что и теорема синусовъ получается непосредственно изъ формулъ (2), которыя получены безъ помощи соотношеній (I′). Изъ соотношеній же (2) и (1) мы получаемъ:

$$\begin{aligned} \sin^2 b\sin^2 c\sin^2\alpha = (\cos b\cos c &- \cos a)\cos a\\ &+ 1-\cos^2 b-\cos^2 c+\cos a\cos b\cos c. \end{aligned}$$

Умножая же это на $\cos\alpha$, мы получаемъ:

$$\begin{aligned} \cos\alpha\sin^2 b\sin^2 c\sin^2\alpha = &-(\cos b\cos c-\cos a)\sin^2 a\\ &+(\cos a\cos c-\cos b)(\cos a\cos b-\cos c). \end{aligned}$$

Примѣняя, наконецъ, соотношенія (I), мы находимъ:

$$\cos a\sin b\sin c\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = -\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma,$$

откуда при помощи теоремы синусовъ уже непосредственно получается формула (I′), а остальныя выводятся изъ нея путемъ циклическихъ перемѣщеній.

§ 43. Дальнѣйшія формулы перваго порядка. — Примѣненіе ихъ къ прямоугольному треугольнику.

1. Выведемь теперь рядъ формулъ, которыя отчасти интересны сами по себѣ, частью же найдутъ примѣненіе въ отдѣлѣ D.

Согласно теоремѣ косинусовъ:

$$\cos b - \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta = 0$$

и

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos\alpha.$$

Подставляя въ первое уравненіе вмѣсто $\cos a$ послѣднее выраженіе, мы получимъ:

$$\cos b\,(1 - \cos^2 c) + \sin b \sin c \cos c \cos\alpha + \sin c \sin a \cos\beta = 0,$$

или

$$\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos\alpha + \sin a \cos\beta = 0.$$

Мы получаемъ, такимъ образомъ, первую систему формулъ:

$$\left.\begin{aligned}
\sin a \cos\beta + \cos b \sin c + \sin b \cos c \cos\alpha &= 0,\\
\sin a \cos\gamma + \cos c \sin b + \sin c \cos b \cos\alpha &= 0;\\
\sin b \cos\gamma + \cos c \sin a + \sin c \cos a \cos\beta &= 0,\\
\sin b \cos\alpha + \cos a \sin c + \sin a \cos c \cos\beta &= 0;\\
\sin c \cos\alpha + \cos a \sin b + \sin a \cos b \cos\gamma &= 0,\\
\sin c \cos\beta + \cos b \sin a + \sin b \cos a \cos\gamma &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Отсюда полярнымъ преобразованіемъ получаемъ непосредственно вторую систему:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha \cos b + \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta \cos\gamma \cos a &= 0,\\
\sin\alpha \cos c + \cos\gamma \sin\beta + \sin\gamma \cos\beta \cos a &= 0;\\
\sin\beta \cos c + \cos\gamma \sin\alpha + \sin\gamma \cos\alpha \cos b &= 0,\\
\sin\beta \cos a + \cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma \cos b &= 0;\\
\sin\gamma \cos a + \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos c &= 0,\\
\sin\gamma \cos b + \cos\beta \sin\alpha + \sin\beta \cos\alpha \cos c &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Если подставимъ въ первое изъ уравненій (1), согласно теоремѣ синусовъ, $\sin a = \sin b \cdot \sin\alpha : \sin\beta$ и раздѣлимъ полученный результатъ на $\sin b$, затѣмъ произведемъ такое же преобразованіе надъ остальными уравненіями (1), то мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha \,\mathrm{cotg}\,\beta + \mathrm{cotg}\, b \sin c + \cos c \cos\alpha &= 0,\\
\sin\alpha \,\mathrm{cotg}\,\gamma + \mathrm{cotg}\, c \sin b + \cos b \cos\alpha &= 0;\\
\sin\beta \,\mathrm{cotg}\,\gamma + \mathrm{cotg}\, c \sin a + \cos a \cos\beta &= 0,\\
\sin\beta \,\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\, a \sin c + \cos c \cos\beta &= 0;\\
\sin\gamma \,\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\, a \sin b + \cos b \cos\gamma &= 0,\\
\sin\gamma \,\mathrm{cotg}\,\beta + \mathrm{cotg}\, b \sin a + \cos a \cos\gamma &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Къ этому полярныя формулы:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} \beta \sin \gamma + \cos \gamma \cos a &= 0, \\ \sin a \operatorname{cotg} c + \operatorname{cotg} \gamma \sin \beta + \cos \beta \cos a &= 0; \\ \sin b \operatorname{cotg} c + \operatorname{cotg} \gamma \sin \alpha + \cos \alpha \cos b &= 0, \\ \sin b \operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \cos b &= 0; \\ \sin c \operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos c &= 0, \\ \sin c \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} \beta \sin \alpha + \cos \alpha \cos c &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

2. Если третьи уравненія системъ (I) и (I′) умножимъ соотвѣтственно на $\cos \gamma$ и $\cos c$, полученныя два выраженія для произведенія $\cos \gamma \cos c$ приравняемъ другъ другу и воспользуемся соотношеніемъ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то мы получимъ:

$$\cos a \cos b \cos \gamma - \sin a \sin b + \sin a \sin b \sin^2 \gamma$$
$$= \cos \alpha \cos \beta \cos c - \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta \sin^2 c.$$

Но съ обѣихъ сторонъ этого равенства послѣдніе члены равны, ибо въ силу соотношеній (II)

$$\frac{\sin a \sin b \cdot \sin^2 \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \cdot \sin^2 c} = \frac{D^2}{\Delta^2} \cdot \frac{\Delta^2}{D^2} = 1;$$

такимъ образомъ, мы получаемъ систему формулъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos a \cos b \cos \gamma - \sin a \sin b &= \cos \alpha \cos \beta \cos c - \sin \alpha \sin \beta, \\ \cos b \cos c \cos \alpha - \sin b \sin c &= \cos \beta \cos \gamma \cos a - \sin \beta \sin \gamma, \\ \cos c \cos a \cos \beta - \sin c \sin a &= \cos \gamma \cos \alpha \cos b - \sin \gamma \sin \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Эти формулы замѣчательны тѣмъ, что онѣ полярны самимъ себѣ; если обозначимъ поэтому черезъ $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ стороны и углы полярнаго треугольника, то мы будемъ имѣть:

$$\cos a' \cos b' \cos \gamma' - \sin a' \sin b' = \cos a \cos b \cos \gamma - \sin a \sin b, \qquad (4)$$

$$\cos \alpha' \cos \beta' \cos c' - \sin \alpha' \sin \beta' = \cos \alpha \cos \beta \cos c - \sin \alpha \sin \beta. \qquad (5)$$

Это обыкновенно выражаютъ такъ: *правыя и лѣвыя части уравненій (3), взятыя сами по себѣ, представляютъ собой инваріанты при переходѣ отъ треугольника къ его полярному треугольнику.*

3. *Неперовы аналогіи.* Для вывода слѣдующей системы формулъ мы воспользуемся формулами *Деламбра*, которыя, въ свою очередь, будутъ выведены только въ слѣдующемъ отдѣлѣ (§ 45, III); но въ то время, какъ послѣднія, какъ мы увидимъ, представляютъ собой формулы

второго порядка, изъ нихъ путемъ дѣленія могутъ быть выведены формулы перваго порядка. Это такъ называемыя Неперовы *) аналогіи (ср. § 45, 5):

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}},\qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}},\qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}. \tag{6}$$

Остальныя восемь Неперовыхъ аналогій получаются изъ этихъ путемъ циклическихъ перемѣщеній.

Двѣ рядомъ стоящія формулы переходятъ одна въ другую полярнымъ преобразованіемъ.

Двѣ формулы, стоящія одна подъ другой, получаются также одна изъ другой при помощи подстановки E_3, о которой будетъ рѣчь ниже — въ § 48.

Изъ одной Неперевой формулы могутъ быть получены всѣ остальныя путемъ полярнаго преобразованія, подстановки E_3 и циклическаго перемѣщенія.

4. Теорема тангенсовъ получается изъ двухъ стоящихъ одна подъ другой Неперовыхъ аналогій путемъ дѣленія:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}. \tag{7}$$

5. Стюди **) далъ Неперовымъ аналогіямъ замѣчательную форму, которую мы и выведемъ здѣсь нѣсколько инымъ путемъ. Если мы примѣнимъ къ третьей изъ формулъ (6) теорему сложенія тангенсовъ и косинусовъ и вмѣсто тангенсовъ введемъ котангенсы, то мы получимъ:

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{b}{2}+\operatorname{cotg}\frac{c}{2}}{1-\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{a}{2}=\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

---

*) John Neper или Napier, Baron von Merchiston, шотландецъ, жилъ 1550 — 1617 г. г.

**) l. c., p. 136. Обыкновенный непосредственный выводъ Неперовыхъ аналогій (какъ, напримѣръ, у Эйлера) оставляетъ невыясненнымъ вопросъ о знакѣ.

Замѣщая правую сторону лѣвой, мы отсюда легко выведемъ:

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}+1}{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}-1}=\frac{\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2}+\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}}.$$

Почленнымъ сложеніемъ и вычитаніемъ мы получимъ:

$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}+\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\frac{a}{2}+\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2}}{-1+\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}+\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\frac{a}{2}+\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2}}.$$

Если положимъ, какъ это дѣлаетъ Стюди:

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2}=l_1,\quad \operatorname{cotg}\frac{b}{2}=l_2,\quad \operatorname{cotg}\frac{c}{2}=l_3,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\lambda_1,\quad \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=\lambda_2,\quad \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\lambda_3,$$

то мы отсюда получимъ, пользуясь также циклическимъ перемѣщеніемъ и полярнымъ преобразованіемъ, систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned} l_2 l_3 &= \frac{1-\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}{-1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2},\\ l_3 l_1 &= \frac{1-\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}{-1+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3},\\ l_1 l_2 &= \frac{1-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}{-1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2\lambda_3 &= \frac{1-l_2l_3+l_3l_1+l_1l_2}{-1+l_2l_3+l_3l_1+l_1l_2},\\ \lambda_3\lambda_1 &= \frac{1-l_3l_1+l_1l_2+l_2l_3}{-1+l_3l_1+l_1l_2+l_2l_3},\\ \lambda_1\lambda_2 &= \frac{1-l_1l_2+l_2l_3+l_3l_1}{-1+l_1l_2+l_2l_3+l_3l_1}. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

6. Изъ соотношеній (8) и (8′) Стюди выводитъ интересное предложеніе:

„Четыре дроби

$$\frac{1+l_2l_3}{\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2},\qquad -\frac{1-l_2l_3}{1-\lambda_2\lambda_3},$$

$$\frac{l_3l_1+l_1l_2}{1+\lambda_2\lambda_3},\qquad \frac{l_3l_1-l_1l_2}{\lambda_3\lambda_1-\lambda_1\lambda_2},$$

равно какъ и восемь другихъ, которыя могутъ быть изъ нихъ получены путемъ циклическихъ перемѣщенiй индексовъ 1, 2, 3, имѣютъ всѣ одно и то же значенiе.

7. Случай прямоугольнаго треугольника. Мы примѣнимъ теперь теоремы синусовъ и косинусовъ на сферѣ къ прямоугольному треугольнику.

Если мы положимъ $\gamma = \pi/2$ (фиг. 35), то соотношенiя (I), (I') и (II) непосредственно даютъ формулы:

$$\cos c = \cos a \cos b, \tag{9}$$

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta, \tag{10}$$

$$\cos a = -\frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \qquad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}, \tag{11}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \qquad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}. \tag{12}$$

Изъ соотношенiй (11) и (12) при помощи формулы (9) получаемъ:

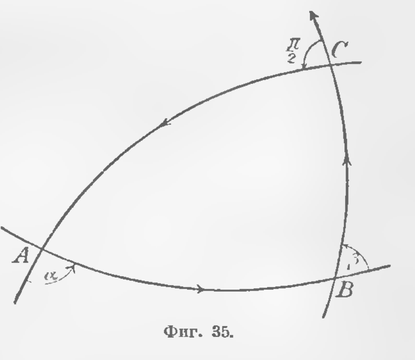
$$\cos \alpha = \frac{\cos a \sin b}{\sin c} = -\frac{\cos c \sin b}{\cos b \sin c},$$

а потому

$$\cos \alpha = -\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, \qquad \cos \beta = -\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}. \tag{13}$$

Наконецъ, дѣля почленно уравненiя (12) на уравненiя (13) и пользуясь соотношенiемъ (9), получаемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}. \tag{14}$$



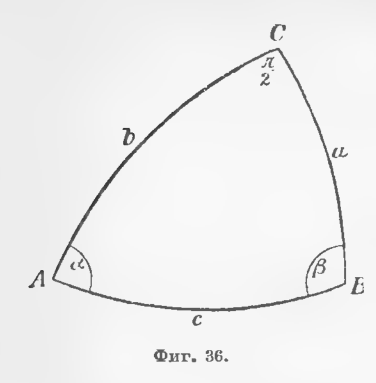
Фиг. 35.

Формулы (12) (14) по строенiю своему аналогичны соотвѣтствующимъ формуламъ плоской тригонометрiи; только вмѣсто самыхъ сторонъ a, b, c мы здѣсь имѣемъ ихъ тригонометрическiя функцiи. Различiе въ знакахъ обусловливается нашимъ обозначенiемъ.

Формулы (9) – (11) не имѣютъ аналогичныхъ въ плоской тригонометрiи.

8. Формулы прямоугольнаго треугольника въ Эйлеровомъ обозначенiи получаются изъ тѣхъ, которыя приведены здѣсь, путемъ

замѣщенія угловъ ихъ дополненіями до 180°; такимъ образомъ, мы получаемъ употребительныя *) въ практикѣ формулы для обыкновеннаго прямоугольнаго треугольника (фиг. 36):



Фиг. 36.

$$\cos c = \cos a \cos b, \qquad (9^*)$$

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta, \qquad (10^*)$$

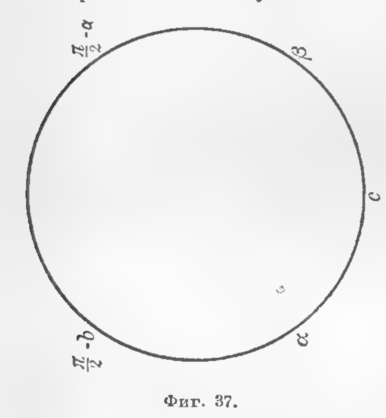
$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}, \qquad (11^*)$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}, \qquad (12^*)$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, \quad \cos \beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}, \qquad (13^*)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}. \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}. \qquad (14^*)$$

2. Всѣ эти формулы обьединяются въ такъ называемомъ „правилѣ Непера“, болѣе глубокія основанія котораго будутъ выяснены ниже. Опуская прямые углы, напишемъ остальные пять элементовъ треугольника, замѣняя катеты ихъ дополненіями до $\pi/2$, вдоль окружности въ томъ порядкѣ, въ какомъ они слѣдуютъ другъ за другомъ въ треугольникѣ (фиг. 37). Въ такомъ случаѣ правило Непера гласитъ:



Фиг. 37.

1. Косинусъ каждаго элемента равенъ произведенію котангенсовъ двухъ смежныхъ элементовъ.

2. Косинусъ каждаго элемента равенъ произведенію синусовъ двухъ несмежныхъ съ нимъ элементовъ.

Примѣненіе этихъ формулъ къ практическому рѣшенію прямоугольнаго сферическаго треугольника см. въ § 52.

C. Основныя формулы второго порядка.

§ 44. Введеніе.

1. Мы переходимъ теперь къ группамъ формулъ, которыя по самой внутренней природѣ своей существенно отличаются отъ тѣхъ, которыя мы разсматривали до сихъ поръ. Въ то время, какъ формулы

*) Ср § 52.

предыдущаго параграфа были въ одинаковой мѣрѣ справедливы для всѣхъ 16 типовъ треугольниковъ, мы должны теперь произвести раздѣленіе этихъ типовъ. Именно, новыя формулы содержатъ квадратный корень, вслѣдствіе чего приходится дѣлать выборъ между двумя знаками этихъ формулъ. Оказывается, что опредѣленный выборъ этого знака характеризуетъ 8 типовъ изъ числа 16, тогда какъ другой знакъ соотвѣтствуетъ остальнымъ 8 типамъ. Наши треугольники теперь распадаются, такимъ образомъ, на два класса, каждому изъ которыхъ соотвѣтствуетъ опредѣленный знакъ радикала.

Болѣе того, если будемъ искать совокупность всѣхъ треугольниковъ, соотвѣтствующихъ опредѣленному знаку, то понятіе о треугольникѣ, установленное Мёбіусомъ, оказывается уже недостаточнымъ. Мы приходимъ къ новому расширенію понятія о треугольникѣ, именно, мы вынуждены разсматривать такіе треугольники, въ которыхъ стороны и углы, отличающіеся другъ отъ друга на кратное 2π, должны считаться различными.

Въ такомъ случаѣ три точки опредѣляютъ уже не 16 треугольниковъ, какъ у Мёбіуса, но безчисленное множество ихъ, которые можно, однако, наглядно представить при помощи 32 „представителей“; изъ этихъ представителей 16 относятся къ одному классу, а остальные 16 къ другому. Это раздѣленіе треугольниковъ на два класса и связанное съ этимъ обобщеніе понятія о треугольникѣ было ясно уже Гауссу, въ сочиненіи котораго „Theoria motus“ въ № 54 имѣется такое мѣсто: „Quodsi quidem idea Trianguli sphaerici in maxima generalitate concipitur, ut nec latera nec anguli ullis limitibus restringantur, casus existere possunt, ubi in cunctis aequationibus praecedentibus signum mutare oportet“ [6]).

Однако, все значеніе этого обобщенія было впервые усмотрѣно и разработано Стюди *). Относительно наиболѣе глубокихъ корней этихъ явленій у Гаусса, повидимому, нѣтъ никакихъ указаній. Они имѣютъ геометрическій характеръ и находятъ себѣ выраженіе въ „теоремѣ Стюди“ (§ 47).

§ 45. Формулы Деламбра.

1. Для дальнѣйшаго изложенія основное значеніе имѣютъ такъ называемыя „формулы Деламбра“ **). Онѣ образуютъ систему, состоящую

---

[6]) „Если же взять наиболѣе общее понятіе о сферическомъ треугольникѣ, т. е. не ограничивать ни сторонъ его ни угловъ никакими предѣлами, то могутъ быть случаи, когда во всѣхъ предыдущихъ формулахъ слѣдуетъ перемѣнить знакъ“.

*) См. выноску на стр. 69.

**) Эти формулы были впервые найдены Деламбромъ (Delambre) въ 1807 г.; но послѣ того онѣ были открыты независимо Гауссомъ и Мольвейде, почему ихъ часто и называютъ именами этихъ математиковъ. Ср. также § 31, 6.

изъ $3 \cdot 4 = 12$ формулъ, изъ которыхъ, однако, мы выведемъ только первыя четыре, остальныя же получимъ циклическими перемѣщеніями.

Съ этой цѣлью мы будемъ слѣдовать совершенно тому же пути, что и въ плоской тригонометріи (§ 31, 2); именно въ гоніометрическихъ формулахъ

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}, \quad \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$

мы подставимъ вмѣсто $\cos a$ его значеніе, указанное въ § 42, 1. Послѣ простыхъ преобразованій мы тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 \frac{a}{2} &= \frac{\sin s_0 \sin s_1}{\sin b \sin c}, & \cos^2 \frac{a}{2} &= \frac{\sin s_2 \sin s_3}{\sin b \sin c}, \\ \sin^2 \frac{\beta}{2} &= \frac{\sin s_0 \sin s_2}{\sin c \sin a}, & \cos^2 \frac{\beta}{2} &= \frac{\sin s_3 \sin s_1}{\sin c \sin a}, \\ \sin^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{\sin s_0 \sin s_3}{\sin a \sin b}, & \cos^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{\sin s_1 \sin s_2}{\sin a \sin b}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ s_i имѣетъ то же значеніе, что и въ формулѣ (4) на стр. 70.

Мы приведемъ здѣсь также формулы, полярныя этимъ, такъ какъ здѣсь ихъ естественнѣе всего указать, хотя сейчасъ онѣ намъ не нужны, а понадобятся только въ отдѣлѣ D:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 \frac{a}{2} &= \frac{\sin \sigma_0 \sin \sigma_1}{\sin \beta \sin \gamma}, & \cos^2 \frac{a}{2} &= \frac{\sin \sigma_2 \sin \sigma_3}{\sin \beta \sin \gamma}, \\ \sin^2 \frac{b}{2} &= \frac{\sin \sigma_0 \sin \sigma_2}{\sin \gamma \sin a}, & \cos^2 \frac{b}{2} &= \frac{\sin \sigma_3 \sin \sigma_1}{\sin \gamma \sin a}, \\ \sin^2 \frac{c}{2} &= \frac{\sin \sigma_0 \sin \sigma_3}{\sin a \sin \beta}, & \cos^2 \frac{c}{2} &= \frac{\sin \sigma_1 \sin \sigma_2}{\sin a \sin \beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Изъ соотношеній (1) и (1′) почленнымъ дѣленіемъ получаемъ:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{\sin s_0 \sin s_1}{\sin s_2 \sin s_3} \text{ и т. д.}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{\sin \sigma_0 \sin \sigma_1}{\sin \sigma_2 \sin \sigma_3} \text{ и т. д.} \qquad (2)$$

Попутно замѣтимъ, что изъ формулъ (1) и (1′) легко также получить теорему синусовъ. Дѣйствительно, перемножая попарно рядомъ стоящія формулы, мы получимъ:

$$\begin{aligned} 4 \sin s_0 \sin s_1 \sin s_2 \sin s_3 &= \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 a \\ &= \sin^2 c \sin^2 a \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 \gamma, \\ 4 \sin \sigma_0 \sin \sigma_1 \sin \sigma_2 \sin \sigma_3 &= \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 a \\ &= \sin^2 \gamma \sin^2 a \sin^2 b \\ &= \sin^2 a \sin^2 \beta \sin^2 c. \end{aligned}$$

Лѣвыя части этихъ уравненій представляютъ собой не что иное, какъ полученныя выше — стр. 70 — выраженія (5) для D^2 и Δ^2; въ дальнѣйшемъ выводъ производится такъ же, какъ и выше.

2. Мы возвращаемся теперь къ выводу формулъ Деламбра. Изъ соотношеній (1) слѣдуетъ:

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{\sin^2 s_2}{\sin^2 a}}; \qquad \frac{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{\sin^2 s_3}{\sin^2 a}}. \tag{3}$$

Покажемъ теперь, что радикалы имѣютъ здѣсь одновременно оба положительное или оба отрицательное значеніе. Именно, если положимъ:

$$\sqrt{\frac{\sin^2 s_2}{\sin^2 a}} = \varrho\frac{\sin s_2}{\sin a}, \quad \sqrt{\frac{\sin^2 s_3}{\sin^2 a}} = \varrho'\frac{\sin s_3}{\sin a}, \quad \text{гдѣ} \quad \varrho,\ \varrho' = \mp 1,$$

то будемъ имѣть:

$$\frac{\sin\beta\sin\gamma}{4\sin^2\frac{a}{2}} = \varrho\varrho'\frac{\sin s_2\sin s_3}{\sin^2 a}.$$

Примѣняя сюда формулы (1), а также соотношенія (5) и (II) § 42, мы получаемъ:

$$\varrho\varrho'\cdot\sin s_0\sin s_1\sin s_2\sin s_3 = \sin^2 a\sin\beta\sin\gamma\sin b\sin c$$

или

$$\varrho\varrho'\cdot D^2 = \frac{\sin b\sin c}{\sin\beta\sin\gamma}\cdot\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2 a = \left(\frac{D}{\Delta}\right)^2\cdot\Delta^2 = D^2,$$

такъ что $\varrho\varrho' = +1$, что и требовалось доказать.

Соотношенія (3) принимаютъ теперь видъ:

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \varrho\frac{\sin s_2}{\sin a}, \qquad \frac{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \varrho\frac{\sin s_3}{\sin a}, \tag{3a}$$

при чемъ ϱ имѣетъ въ обоихъ случаяхъ либо значеніе $+1$, либо -1.

То же относится и къ слѣдующимъ двумъ формуламъ Деламбра, которыя получаются изъ предыдущихъ путемъ сложенія и вычитанія:

$$\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \varrho\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}; \qquad \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = -\varrho\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}. \tag{4}$$

Чтобы получить остальныя двѣ формулы, мы напишемъ теорему синусовъ въ формѣ:

$$\frac{\sin\beta \mp \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin b \mp \sin c}{\sin a};$$

при верхнихъ знакахъ мы тогда, въ виду соотношенiй (5) и (8) на стр. 18 и 19, получимъ:

$$\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}};$$

а при нижнихъ знакахъ будемъ имѣть:

$$\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Сравнивая эти результаты съ соотношенiями (4), мы получимъ:

$$\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = -\varrho\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}; \quad \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \varrho\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}. \qquad (4a)$$

Сводя теперь вмѣстѣ формулы (4), (4a), а также тѣ, которыя изъ нихъ получаются путемъ циклическихъ перестановокъ, мы получаемъ слѣдующiя три

системы формулъ Деламбра:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\ \frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \varrho\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}, \qquad &&\text{b)}\ \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = -\varrho\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}},\\
&\text{c)}\ \frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = -\varrho\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}, \qquad &&\text{d)}\ \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \varrho\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}},
\end{aligned}\right\} \quad (III_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\ \frac{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \varrho\frac{\cos\frac{c-a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}, \qquad &&\text{b)}\ \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = -\varrho\frac{\sin\frac{c-a}{2}}{\sin\frac{b}{2}},\\
&\text{c)}\ \frac{\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = -\varrho\frac{\cos\frac{c+a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}, \qquad &&\text{d)}\ \frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \varrho\frac{\sin\frac{c+a}{2}}{\sin\frac{b}{2}},
\end{aligned}\right\} \quad (III_2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{a)}\ \dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \varrho\,\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}, & \text{b)}\ \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = -\varrho\,\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}, \\[2ex]
\text{c)}\ \dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \varrho\,\dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}, & \text{d)}\ \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \varrho\,\dfrac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}
\end{array}\right\}\ (\mathrm{III}_3)$$

$$(\varrho = \pm 1).$$

3. Эти системы совершенно замкнуты въ себѣ и путемъ полярнаго преобразованія уже не получаютъ дальнѣйшаго расширенія; въ самомъ дѣлѣ, формулы b) и c) полярны каждая самой себѣ, формулы же a) и d) при полярномъ преобразованіи переходятъ одна въ другую.

Въ каждой системѣ формулъ (III_i) ($i = 1, 2, 3$) ϱ имѣетъ одновременно либо значеніе $+1$, либо значеніе -1. Теперь поставимъ себѣ вопросы:

1. Когда ϱ имѣетъ въ каждой системѣ положительное и когда отрицательное значеніе?

2. Какая зависимость существуетъ между значеніями ϱ въ различныхъ системахъ (III_i)?

Оба вопроса разрѣшаются совмѣстно *). Мы начнемъ изслѣдованіе съ частнаго случая,—именно, мы спросимъ: какіе знаки мы должны взять въ уравненіяхъ Деламбра, напримѣръ, для треугольниковъ типа $T_{00}^{(1)}$. Изъ таблицы, помѣщенной на стр. 53, мы беремъ слѣдующіе предѣлы для сторонъ и угловъ въ треугольникахъ этого типа:

a	b	c	α	β	γ
$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$	$0, \pi$	$\pi, 2\pi$	$\pi, 2\pi$

Если мы теперь хотимъ опредѣлить для этого типа знакъ ϱ въ формулѣ (III_1) (a), то мы должны руководствоваться слѣдующими предѣлами:

$\frac{\beta+\gamma}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{b-c}{2}$	$\frac{a}{2}$
$\pi, 2\pi$	$0, \frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	$0, \frac{\pi}{2}$

*) Другое болѣе простое изложеніе можно найти въ § 50, 4. То, которое дано здѣсь, нѣсколько сложнѣе, но зато естественнѣе.

Поэтому

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2} \text{ имѣетъ отрицательное значеніе,}$$

$$\sin\frac{a}{2} \quad \text{„} \quad \text{положительное} \quad \text{„}$$

$$\cos\frac{b-c}{2} \quad \text{„} \quad \text{положительное} \quad \text{„}$$

$$\cos\frac{a}{2} \quad \text{„} \quad \text{положительное} \quad \text{„} \quad ;$$

поэтому здѣсь ϱ имѣетъ значеніе -1 и только это одно значеніе. Символически мы напишемъ теперь, когда рѣчь идетъ только о знакѣ, эту формулу Деламбра въ такомъ видѣ:

$$\frac{-}{+} = \varrho\frac{+}{+};$$

слѣдовательно, въ нашемъ случаѣ $\varrho = -1$.

Но согласно, п. 2, этимъ путемъ уже доказано, что для типа $T^{(1)}_{(00)}$ во всей системѣ (III_1) должны быть взяты нижніе знаки. Если бы мы захотѣли примѣнить тотъ же пріемъ для рѣшенія вопроса о знакахъ въ формулѣ (III_2) (a), то это оказалось бы невозможнымъ: именно, здѣсь предѣлы будутъ такіе:

$\frac{\gamma+a}{2}$	$\frac{\beta}{2}$	$\frac{c-a}{2}$	$\frac{b}{2}$
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}, \pi$	$0, \pi$	$\frac{\pi}{2}, \pi$

Поэтому мы будемъ имѣть знаки:

$$\text{для} \quad \sin\frac{a+\gamma}{2} \text{ тотъ или другой,}$$

$$\text{„} \quad \sin\frac{\beta}{2} \text{ положительный,}$$

$$\text{„} \quad \cos\frac{c-a}{2} \text{ тотъ или другой,}$$

$$\text{„} \quad \cos\frac{b}{2} \text{ отрицательный.}$$

Если мы будемъ здѣсь называть величину, которая можетъ имѣть какъ одинъ, такъ и другой знакъ, „неопредѣленной“ и будемъ это отмѣчать вопросительнымъ знакомъ (?), то формула Деламбра (III_2) (a) принимаетъ видъ:

$$\frac{?}{+} = \varrho\,\frac{?}{-},$$

такъ что мы не можемъ сдѣлать заключенія относительно знака ϱ; напротивъ, формула (III_2) (b) принимаетъ символическую форму

$$\frac{+}{+}\qquad\varrho\frac{+}{+},$$

и, слѣдовательно, въ этой формулѣ опять таки $\varrho = -1$. Но такъ какъ въ одной и той же системѣ, какъ было доказано, ϱ имѣетъ всегда одно и то же значеніе, то во всей системѣ (III_2) $\varrho = -1$. Такимъ же образомъ можно обнаружить, что и во всей системѣ (III_3) $\varrho = -1$. Мы пришли, такимъ образомъ, къ слѣдующему результату. Для треугольниковъ типа $T^{(1)}_{00}$ во всѣхъ формулахъ Деламбра $\varrho = -1$. Пользуясь тѣмъ же пріемомъ, можно опредѣлить знаки для всѣхъ 16 типовъ.

4. Къ той же цѣли быстрѣе и нагляднѣе приводитъ слѣдующая таблица *), которую легко составить при помощи таблицы, приведенной на стр. 53; она составляется чисто механически при помощи очень простыхъ соображеній; нужно только заполнить немногія мѣста указаннымъ выше способомъ:

	III_1				III_2				III_3			
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
$T^{(0)}_{00}$	$\frac{+}{+}=\varrho\frac{+}{+}$	?	?	$\frac{+}{+}=\varrho\frac{+}{+}$	$\frac{+}{+}=\varrho\frac{+}{+}$			$\frac{+}{+}=\varrho\frac{+}{+}$	$\frac{+}{+}=\varrho\frac{+}{+}$	?	?	$\frac{+}{+}=\varrho\frac{+}{+}$
$T^{(0)}_{11}$	$=\varrho$			$\frac{+}{-}=\varrho\frac{-}{+}$	$\frac{-}{+}=\varrho\frac{-}{+}$	?	?	$\frac{+}{-}=\varrho\frac{-}{+}$	$\frac{-}{+}=\varrho\frac{+}{-}$			$\frac{+}{-}=\varrho\frac{-}{+}$
$T^{(0)}_{01}$	$\frac{-}{+}=\varrho\frac{+}{-}$	?	?	$\frac{+}{-}=\varrho\frac{+}{-}$	$\frac{-}{-}=\varrho\frac{+}{-}$			$\frac{+}{-}=\varrho\frac{-}{+}$	$\frac{-}{+}=\varrho\frac{+}{+}$	?	?	$\frac{+}{-}=\varrho\frac{+}{+}$
$T^{(0)}_{10}$	$\frac{+}{+}=\varrho$			$=\varrho$	$\frac{+}{}=\varrho$	?	?	$\frac{+}{-}=\varrho$	$\frac{+}{-}=\varrho\frac{+}{-}$	?	?	$\frac{+}{+}=\varrho\frac{-}{+}$
	a	d	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
$T^{(1)}_{01}$	$\frac{+}{+}=\varrho\frac{+}{+}$	?	?	$\frac{+}{}=\varrho\frac{}{+}$	?	$\frac{}{+}=\varrho\frac{+}{+}$	$\frac{}{+}=\varrho\frac{-}{}$	?	?	$\frac{+}{+}=\varrho\frac{-}{+}$	$\frac{}{+}=\varrho$	?
$T^{(1)}_{10}$	$=\varrho$			$=\varrho$		$\frac{-}{}=\varrho$	$=\varrho\frac{}{+}$	?		$\frac{-}{+}=\varrho\frac{+}{+}$	$=\varrho\frac{}{+}$	?
$T^{(1)}_{00}$	$\frac{-}{+}=\varrho\frac{+}{+}$	?	?	$\frac{-}{+}=\varrho\frac{}{+}$	?	$\frac{+}{-}=\varrho\frac{+}{+}$	$=\varrho\frac{-}{-}$	?	?	$\frac{-}{+}=\varrho\frac{-}{+}$	$\frac{-}{-}=\varrho\frac{-}{-}$	?
$T^{(1)}_{11}$	$\frac{+}{+}=\varrho\frac{+}{-}$	?	?	$\frac{+}{-}=\varrho\frac{+}{+}$	?	$\frac{+}{-}=\varrho\frac{-}{+}$	$\frac{-}{+}=\varrho\frac{-}{-}$	?	?	$\frac{+}{+}=\varrho\frac{+}{+}$	$\frac{-}{+}=\varrho\frac{-}{+}$	?

(5)

Таблицы, соотвѣтствующія индексамъ 2 и 3, получаются изъ таблицы (5) путемъ циклическаго перемѣщенія колоннъ (III_1), (III_2), (III_3).

*) По техническимъ причинамъ вездѣ въ этой таблицѣ вмѣсто $-\varrho$ напечатано ϱ.

Если индексы k, l, m обозначаютъ числа 1, 2, 3 въ нѣкоторой опредѣленной послѣдовательности, то мы получаемъ формулы, знаки которыхъ непосредственно опредѣляются таблицей, и формулы, которыя остаются неопредѣленными, по схемѣ:

Типъ	Опредѣленныя		Неопредѣленныя		
	$(III_k a)$	$(III_k d)$	$(III_k b)$	$(III_k c)$	
$T^{(0)}_{\delta\varepsilon}$	$(III_l a)$	$(III_l d)$	$(III_l b)$	$(III_l c)$	
	$(III_m a)$	$(III_m d)$	$(III_m b)$	$(III_m c)$	(6)
	$(III_k a)$	$(III_k d)$	$(III_k b)$	$(III_k c)$	
$T^{(k)}_{\delta\varepsilon}$	$(III_l b)$	$(III_l c)$	$(III_l a)$	$(III_l d)$	
$\delta, \varepsilon = 0, 1$	$(III_m b)$	$(III_m c)$	$(III_m a)$	$(III_m d)$	

Эта схема показываетъ, что для треугольниковъ каждаго типа мы всегда имѣемъ въ своемъ распоряженіи для опредѣленія знака въ соотвѣтствующей системѣ (III_i) $(i = 1, 2, 3)$ двѣ формулы таблицы (5), чѣмъ опредѣляется знакъ всей системы. Два вопроса, поставленные въ п. 3, получаютъ теперь полное разрѣшеніе въ видѣ слѣдующей теоремы, которая непосредственно вытекаетъ изъ таблицы (5) и формулъ (III_i):

Теорема: Во всѣхъ формулахъ Деламбра ϱ одновременно равняется либо $+1$, либо -1; $\varrho = +1$ для типовъ:

$$T^{(0)}_{00} \quad T^{(0)}_{11} \quad T^{(k)}_{01} \quad T^{(k)}_{10} \quad (k = 1, 2, 3).$$

и $\varrho = -1$ для типовъ:

$$T^{(0)}_{01} \quad T^{(0)}_{10} \quad T^{(k)}_{00} \quad T^{(k)}_{11} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Въ частности во всякомъ Эйлеровомъ треугольникѣ $\varrho = +1$.

5. Подчеркнемъ еще разъ, что эта теорема имѣетъ основное значеніе. Она обнаруживаетъ, что нельзя говорить просто о „сферическомъ“ треугольникѣ; имѣется два вида сферическихъ треугольниковъ, которые настолько различны, что ихъ элементы связаны существенно различными системами формулъ *). Въ виду этого глубокаго различія становится цѣлесообразнымъ обозначать треугольники этихъ двухъ категорій различными названіями. Стюди называетъ сферическій

---

*) Уравненія Деламбра при $\varrho = +1$ и $\varrho = -1$ представляютъ уже собой двѣ совершенно различныя системы формулъ. Но ниже мы познакомимся еще съ другими формулами второго порядка, въ которыхъ различіе между собственными и несобственными треугольниками выступаетъ еще рѣзче; въ нихъ въ случаяхъ собственныхъ и несобственныхъ треугольниковъ появляются не только различные знаки, но и различныя функціи (§ 50, (II) и (IV)).

треугольникъ „собственнымъ“, если $\varrho = +1$ и „несобственнымъ“, если $\varrho = -1$.

Изъ 16 типовъ треугольниковъ Мёбіуса восемь, а именно:

$$T_{00}^{(0)} \quad T_{11}^{(0)} \quad T_{01}^{(k)} \quad T_{10}^{(k)}$$

представляютъ собой собственные треугольники, а остальные восемь:

$$T_{01}^{(0)} \quad T_{10}^{(0)} \quad T_{00}^{(k)} \quad T_{11}^{(k)}$$

несобственные.

На таблицѣ I (стр. 50) слѣва начерчены собственные типы, справа -- несобственные. На таблицѣ (5) собственные треугольники отдѣлены отъ несобственныхъ двойными штрихами.

Тѣ формулы, которыя справедливы какъ для собственныхъ, такъ и для несобственныхъ треугольниковъ, называются формулами перваго порядка; тѣ же формулы, которыя относятся только къ собственнымъ или только къ несобственнымъ треугольникамъ, называются формулами второго порядка.

На первый взглядъ это опредѣленіе формулъ перваго и второго порядка отличается отъ того, которое было дано въ п. 3 § 40-го. Но въ слѣдующемъ параграфѣ мы увидимъ, что введеніе собственныхъ и несобственныхъ треугольниковъ необходимо приводитъ къ развитію Мёбіусова понятія о треугольникѣ; оба опредѣленія оказываются поэтому тождественными.

Замѣчательно, что формулы Деламбра при почленномъ дѣленіи даютъ формулы перваго порядка; это—такъ называемыя Неперовы аналогіи, указанныя въ § 43.

Гауссъ полагалъ, что формулы Деламбра при вычисленіяхъ имѣютъ преимущество передъ Неперовыми аналогіями, Деламбръ же оспаривалъ эту точку зрѣнія *). Послѣ того, что было изложено, формулы Деламбра, съ теоретической точки зрѣнія, несомнѣнно стоятъ выше; онѣ обнаруживаютъ существованіе двухъ классовъ треугольниковъ, тогда какъ аналогіи Непера одинаково относятся ко всѣмъ треугольникамъ.

§ 46. Треугольники Гаусса-Стюди.

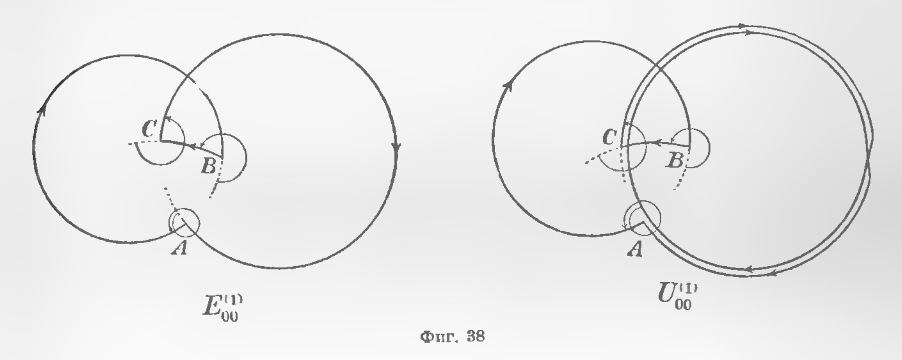
1. Два треугольника одного и того же индекса, (стр. 53), изъ которыхъ одинъ собственный, а другой несобственный, мы будемъ называть „противонаправленными“. Мы получаемъ треугольникъ противонаправленный треугольнику $T_{\delta\varepsilon}^{(i)} (i=0,1,2,3)$, если дадимъ δ и ε другое возможное

*) v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, zweiter Band, p. 193.

для него значеніе; выражаясь геометрически, если мы либо измѣнимъ направленіе всѣхъ трехъ сторонъ треугольника, либо замѣнимъ направленіе вращенія на сферѣ противоположнымъ—два процесса, которые, согласно § 39, 10, взаимно полярны. Выражая то же самое другими словами, можно сказать, что съ этими процессами связана перемѣна знака коэффиціента ϱ.

2. Но это не единственный путь, который приводитъ къ перемѣнѣ знака. Если мы увеличимъ одну изъ сторонъ или одинъ изъ угловъ на 2π, то половина угла нарастетъ при этомъ на π, и мы легко убѣждаемся, что съ этимъ связана перемѣна знака въ формулахъ.

Это заставляетъ насъ считать различными и такіе треугольники, которые отличаются на величину, кратную 2π. Изъ одного и того же треугольника Мёбіуса мы можемъ, такимъ образомъ, получить, мѣняя неограниченно стороны и углы, безчисленное множество треугольниковъ. Треугольники, къ которымъ мы такимъ образомъ приходимъ, мы будемъ называть треугольниками „Гаусса-Стюди“.



Фиг. 38

Въ вычисленіяхъ переходъ отъ треугольниковъ Мёбіуса къ треугольникамъ Гаусса-Стюди осуществляется тѣмъ, что мы въ треугольникѣ Мёбіуса замѣняемъ стороны и углы новыми, полагая

$$\left.\begin{aligned} a' &= a + 2n_a\pi, & \alpha' &= \alpha + 2\nu_a\pi \\ b' &= b + 2n_b\pi, & \beta' &= \beta + 2\nu_\beta\pi \\ c' &= c + 2n_c\pi, & \gamma' &= \gamma + 2\nu_\gamma\pi \end{aligned}\right\} \qquad (\mathfrak{M})$$

Въ этихъ линейныхъ подстановкахъ n и ν означаютъ цѣлыя числа, положительныя или отрицательныя, или 0.

Мы обобщимъ понятіе о „типѣ“ (стр. 53) такимъ образомъ, что отнесемъ къ одному и тому же типу треугольники, которые отличаются одинъ отъ другого только подстановкой вида ($\mathfrak{M}$).

Геометрически можно составить себѣ ясное представленіе о треугольникѣ Гаусса-Стюди, если мы вообразимъ себѣ такого рода тре-

угольникъ, который сдѣланъ изъ нитей, а углы между его сторонами натянуты пружинами; нить можетъ обвивить сферу нѣсколько разъ, а пружина можетъ имѣть нѣсколько оборотовъ. На фигурѣ 38 *) изображены два треугольника Гаусса-Стюди типа $T_{00}^{(1)}$; первый соотвѣтствуетъ подстановкѣ

$$a' = a,\ b' = b,\ c' = c,\ \alpha' = \alpha + 2\pi,\ \beta' = \beta,\ \gamma' = \gamma,$$

а второй подстановкѣ

$$a' = a,\ b' = b + 2\pi,\ c' = c,\ \alpha' = \alpha + 2\pi,\ \beta' = \beta,\ \gamma' = \gamma.$$

3. Какіе же изъ треугольниковъ Гаусса-Стюди будутъ собственными и какіе будутъ несобственными? Такъ какъ наращеніе одной стороны или одного угла на 2π измѣняетъ знакъ коэффиціента ϱ на обратный, то мы должны отдѣлить подстановки ($\mathfrak{M}$), въ которыхъ сумма $n_a + n_b + n_c + \nu_\alpha + \nu_\beta + \nu_\gamma$ выражается четнымъ числомъ, отъ тѣхъ, въ которыхъ она выражается нечетнымъ числомъ; при подстановкахъ перваго рода ϱ сохраняетъ свой знакъ, а при подстановкахъ второго ряда — мѣняетъ его.

Теорема. Подстановки ($\mathfrak{M}$), для которыхъ выполняется сравненіе

$$\Sigma n + \Sigma \nu \equiv 0 \pmod{2}, \qquad (\mathfrak{N})$$

обращаютъ собственный треугольникъ въ собственный же, а несобственный въ несобственный же; напротивъ, при наличности сравненія

$$\Sigma n + \Sigma \nu \equiv 1 \pmod{2} \qquad (\mathfrak{N}')$$

собственный треугольникъ переходитъ въ несобственный, и обратно.

Если мы теперь назовемъ треугольники, принадлежащіе къ одному и тому же типу и отличающіеся только подстановкой ($\mathfrak{N}$), „эквивалентными“, треугольники же, отличающіеся только подстановкой ($\mathfrak{N}'$), „существенно различными“, то эквивалентные треугольники всегда будутъ одновременно собственными или несобственными; изъ двухъ же существенно различныхъ треугольниковъ одинъ будетъ собственнымъ, другой несобственнымъ. Послѣднее предложеніе можно теперь выразить слѣдующимъ образомъ.

Теорема. Подстановка ($\mathfrak{N}$) обращаетъ всякій сферическій треугольникъ въ эквивалентный ему треугольникъ, подстановка же ($\mathfrak{N}'$) — въ существенно отличный.

*) Символы, начерченные при этихъ фигурахъ, будутъ пояснены ниже.

4. Мы можемъ сдѣлать отсюда важный выводъ: то свойство сферическаго треугольника, что онъ можетъ быть собственнымъ или несобственнымъ, уже не связано, какъ у Мёбіуса, съ опредѣленными типами $T^{(i)}_{\delta\varepsilon}$ (§ 45, 5); напротивъ, въ каждомъ типѣ мы теперь имѣемъ группу собственныхъ и группу несобственныхъ треугольниковъ. Такъ, на фиг. 38 первый треугольникъ собственный, а второй несобственный, хотя они оба принадлежатъ къ типу $T^{(1)}_{00}$. Изъ 8 собственныхъ типовъ Мёбіуса получается 8 группъ собственныхъ треугольниковъ при помощи подстановки $(\mathfrak{N})$ и 8 группъ несобственныхъ треугольниковъ при помощи подстановки $(\mathfrak{N}')$. То же имѣетъ мѣсто и для 8 несобственныхъ Мёбіусовыхъ типовъ. Мы получаемъ, такимъ образомъ, 16 группъ собственныхъ треугольниковъ и 16 группъ несобственныхъ; первые мы будемъ обозначать символомъ $E^{(i)}_{\delta\varepsilon}$, вторые символомъ $U^{(i)}_{\delta\varepsilon}\left(\begin{matrix} i=0,1,2,3 \\ \delta,\varepsilon=0,1 \end{matrix}\right)$. Каждая группа можетъ быть представлена любымъ принадлежащимъ ей треугольникомъ; всѣ остальные треугольники той же группы эквивалентны съ этимъ „представителемъ“ ея и получаются изъ него посредствомъ подстановки $(\mathfrak{N})$. Въ качествѣ такихъ представителей особенно удобно взять формы, начерченныя на таблицахъ II и III; мы будемъ называть ихъ „приведенными“ треугольниками; цѣлесообразность такого выбора выяснится ниже.

5. Сдѣлаемъ теперь сводку полученныхъ результатовъ.

Треугольники Мёбіуса.	Треугольники Гаусса-Стюди.
a) Стороны и углы содержатся между 0 и 2π; стороны и углы, сравнимые по модулю, 2π считаются тождественными.	a) Стороны и углы могутъ измѣняться безъ всякаго ограниченія; если они даже сравнимы по модулю 2π, они все же считаются различными.
b) Тремъ даннымъ точкамъ на сферѣ соотвѣтствуютъ 16 различныхъ треугольниковъ.	b) Тремъ даннымъ точкамъ на сферѣ соотвѣтствуетъ безчисленное множество треугольниковъ, которые распадаются, однако, на 32 группы эквивалентныхъ треугольниковъ.
c) Изъ нихъ 8 представляютъ собою собственные, а 8 несобственные треугольники.	c) Изъ этихъ 32 группъ 16 содержатъ эквивалентные собственные треугольники, а остальныя 16 содержатъ эквивалентные между собой несобственные треугольники каждая группа можетъ быть представлена однимъ изъ ея треугольниковъ, — напримѣръ, „приведеннымъ“ треугольникомъ.

6. Можетъ показаться, что принадлежащее Гауссу и Стюди обобщеніе Мёбіусова понятія о треугольникѣ идетъ безъ нужды слишкомъ далеко. Мы условились считать различными треугольники, отличающіеся по модулю 2π; но такъ какъ прибавленіе 4π, 8π ... не вызываетъ никакого измѣненія вь знакахъ, то на первый взглядъ казалось бы достаточнымъ ограничиться такого рода обобщеніемъ: треугольники, коихъ стороны (или углы) сравнимы по модулю 4π, считаются тождественными; при этомъ соглашеніи можно найти число всѣхъ треугольниковъ, которые получаются изъ одного Мёбіусова треугольника, если числамъ n и ν дать только значенія 0 и 1; но тогда мы получаемъ $2^6 = 64$ треугольника; а такъ какъ три точки опредѣляютъ 16 треугольниковъ Мёбіуса, то, съ этой точки зрѣнія, мы должны были бы сказать:

Три точки на сферѣ опредѣляютъ $16 \cdot 64 = 1024$ различныхъ треугольниковъ, половина которыхъ суть собственные треугольники, а остальные несобственные.

Поскольку рѣчь идетъ только о формулахъ Деламбра, этого обобщенія было бы уже достаточно. Если мы, однако, предпочли сразу стать на болѣе общую точку зрѣнія, то мы руководствовались при этомъ двоякаго рода соображеніями.

Подобно тому, какъ формулы Деламбра содержатъ половинные углы, можно было бы также вывести формулы, которыя содержатъ третьи, четвертыя, ..., k-ыя части угла; и это всегда приводило бы къ необходимости ввести новое понятіе о треугольникѣ; мы должны были бы тогда считать тождественными треугольники, сравнимые соотвѣтственно по модулямъ 6π, 8π, ..., $2k\pi$.

Съ этой точки зрѣнія мы получили бы цѣлую серію понятій о треугольникѣ въ зависимости отъ того, что мы послѣдовательно признавали бы тождественными треугольники, сравнимые по

$$\text{mod}\, 2\pi, \quad \text{mod}\, 4\pi, \quad \text{mod}\, 6\pi, \quad \ldots, \quad \text{mod}\, 2k\pi\ ^{*)}.$$

Совокупность всѣхъ треугольниковъ расчленяется, такимъ образомъ, на треугольники 1-ой, 2-ой, 3-ей, ..., k-ой „ступени“. Три точки опредѣляютъ $16 \cdot k^6$ треугольниковъ k-ой ступени.

Такимъ образомъ, понятіе о треугольникѣ Гаусса-Стюди имѣетъ то преимущество, что оно сразу производитъ всѣ эти обобщенія и охватываетъ всѣ мыслимыя формулы.

Гораздо глубже соображенія второго рода; они носятъ геометрическій характеръ и находятъ себѣ выраженіе въ „теоремѣ Стюди“.

*) Cp. F. Klein, „Über die hypergeometrische Reihe“. Литографированныя лекціи. Стр. 312 и дальше.

Таблица IIa.

Приведенные собственные треугольники.

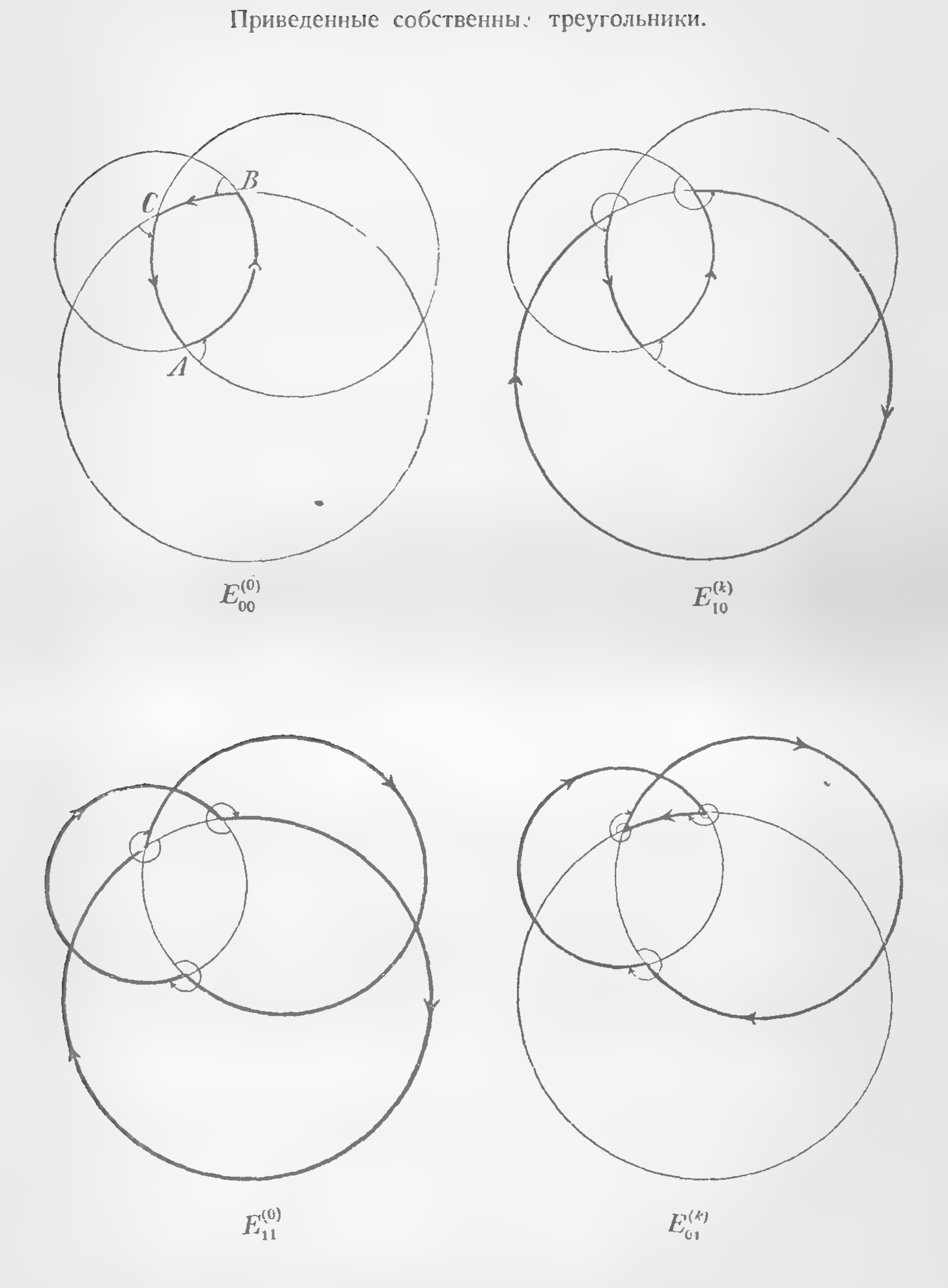


Таблица IIb.

Приведенные собственные треугольники.

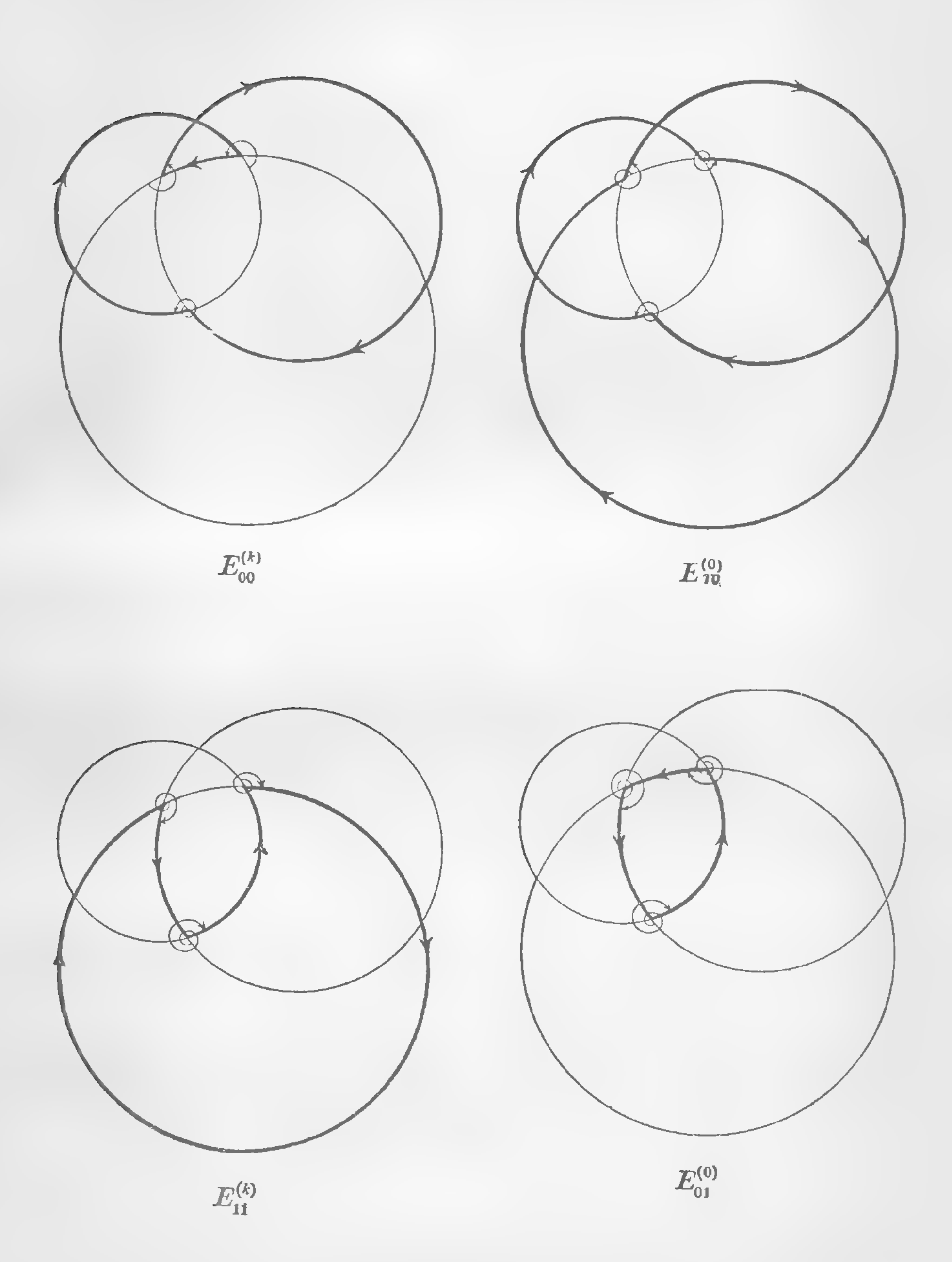
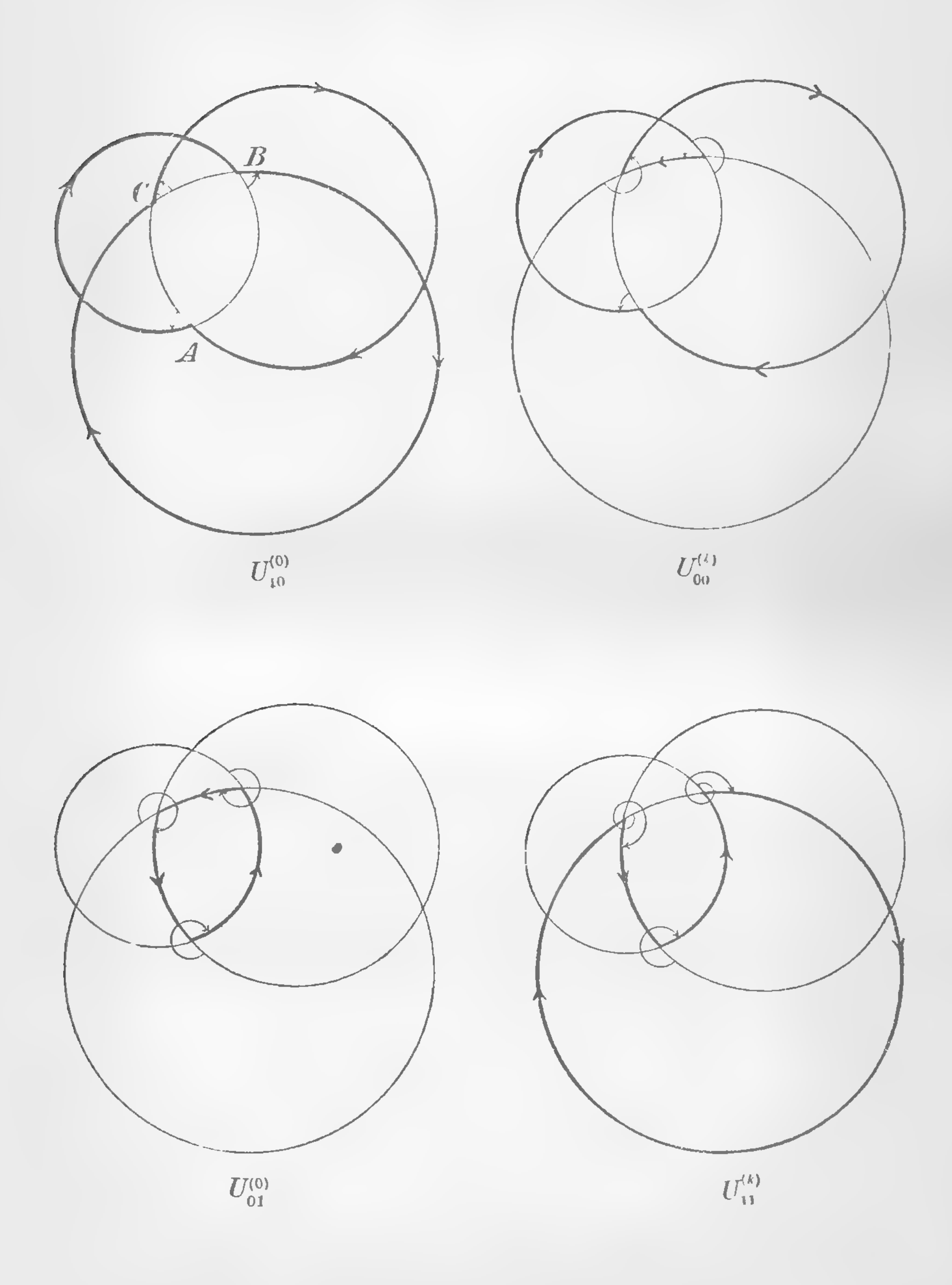


Таблица IIIa.

Приведенные несобственные треугольники.

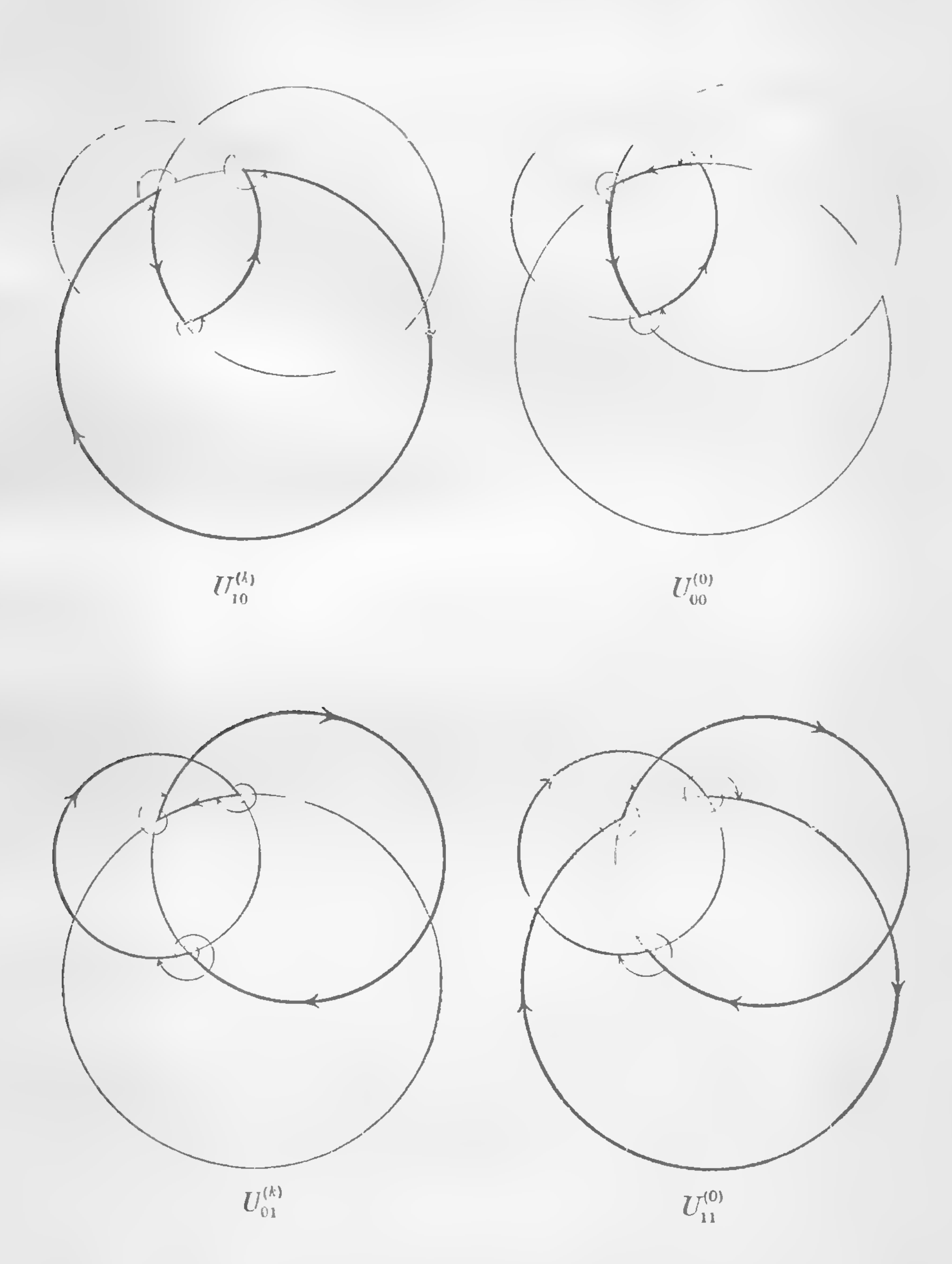


$U_{10}^{(0)}$ $U_{00}^{(l)}$

$U_{01}^{(0)}$ $U_{11}^{(k)}$

Таблица IIIb.

Приведенные несобственные треугольники.



$U_{10}^{(k)}$ $U_{00}^{(0)}$

$U_{01}^{(k)}$ $U_{11}^{(0)}$

§ 47. Теорема Стюди.

1. Если мы назовемъ совокупность всѣхъ треугольниковъ, которые могутъ быть получены изъ какого-либо одного треугольника посредствомъ непрерывной деформаціи на сферѣ (т. е. передвиженіемъ по сферѣ, растяженіемъ или расширеніемъ) „континуумомъ“, то будетъ имѣть мѣсто слѣдующая теорема:

Теорема Стюди. Совокупность всѣхъ собственныхъ треугольниковъ и совокупность всѣхъ несобственныхъ образуютъ каждая въ отдѣльности континуумъ.

Напротивъ, непрерывный переходъ отъ собственнаго треугольника къ несобственному невозможенъ *).

2. Это предложеніе обнаруживаетъ, что послѣдовательное раздѣленіе треугольниковъ на „ступени“, воздвигаетъ совершенно неестественную грань между треугольниками, объединенными важнымъ свойствомъ, заключающимся въ томъ, что они могутъ непрерывной деформаціей переходить другъ въ друга; отъ любого треугольника, скажемъ, первой ступени, всегда можно непрерывной деформаціей придти къ треугольникамъ любой другой ступени. Съ этой точки зрѣнія раздѣленіе треугольниковъ различныхъ ступеней представляется невыполнимымъ. Напротивъ, раздѣленіе треугольниковъ на собственные и несобственные представляетъ собою естественную грань. Такимъ образомъ, разъ мы вообще пришли къ необходимости различать углы, отличающіеся на кратное 2π, то представляется наиболѣе цѣлесообразнымъ положить въ основу понятіе о треугольникахъ Гаусса-Стюди во всей его общности **). Чтобы устранить всякія недоразумѣнія, замѣтимъ еще слѣдующее: опредѣленіе формулъ перваго и второго порядка дословно, какъ оно приведено въ § 45, 5, остается въ силѣ также для треугольниковъ Гаусса-Стюди.

Формулы перваго порядка имѣютъ точкой отправленія теоремы синусовъ и косинусовь, формулы же второго порядка – уравненія Деламбра ***).

3. Доказательство теоремы Стюди. Прежде всего, что треугольники Мёбіуса одного и того же типа могутъ быть непрерывно превращены одинъ въ другой, это непосредственно ясно и не нуждается ни въ какомъ доказательствѣ. Что касается остальнаго, то обращаясь къ первой положительной части предложенія, мы и ее докажемъ постепенно. Именно, мы покажемъ:

---

*) Доказательство дано ниже, въ п. 3.

**) Мы не хотимъ этимъ сказать, что при тѣхъ или иныхъ алгебраическихъ изслѣдованіяхъ не можетъ оказаться цѣлесообразнымъ сохранить упомянутыя „ступени“.

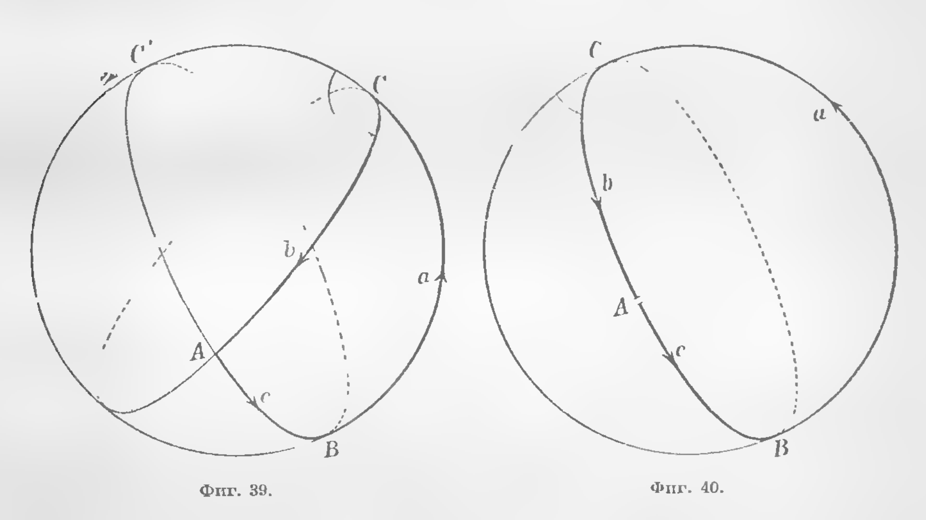
***) Study, l. c., S. 130.

1) что всѣ эквивалентные треугольники (§ 46, 3) всегда могутъ быть преобразованы другъ въ друга непрерывной деформаціей.

Этимъ путемъ мы можемъ каждый треугольникъ непрерывно преобразовать въ приведенный (§ 46, 4); намъ останется поэтому только показать,

2) что 16 приведенныхъ типовъ собственныхъ треугольниковъ, равно какъ и 16 типовъ несобственныхъ, могутъ быть всегда преобразованы другъ въ друга.

1) Мы преобразуемъ треугольникъ — что всегда возможно — такимъ образомъ, чтобы, скажемъ, было $a \equiv \pi \pmod{2\pi}$. На фиг. 39 это показано для Эйлерова треугольника: намъ нужно только вершину C продвинуть въ положительномъ направленіи стороны a до точки C'; треугольникъ получаетъ тогда форму, изображенную на фиг. 40. Если мы теперь,



Фиг. 39. Фиг. 40.

сохраняя вершины B и C, заставимъ сторону a сдѣлать k оборотовъ, то при каждомъ оборотѣ углы β и γ нарастаютъ на 2π. Наконецъ, мы возвратимъ точку C въ ея первоначальное положеніе, при чемъ произведенное измѣненіе угловъ сохранится; такимъ образомъ, мы непрерывной деформаціей произвели подстановку:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c & \alpha & \beta + 2k\pi & \gamma + 2k\pi \end{pmatrix};$$

аналогично могутъ быть произведены подстановки, которыя получаются изъ этой циклическимъ перемѣщеніемъ.

Будемъ теперь перемѣщать въ треугольникѣ ABC вершину C по дугѣ BC въ положительномъ направленіи: тогда при каждомъ оборотѣ сторона a возрастаетъ на 2π, уголъ же α, смотря по установленному на

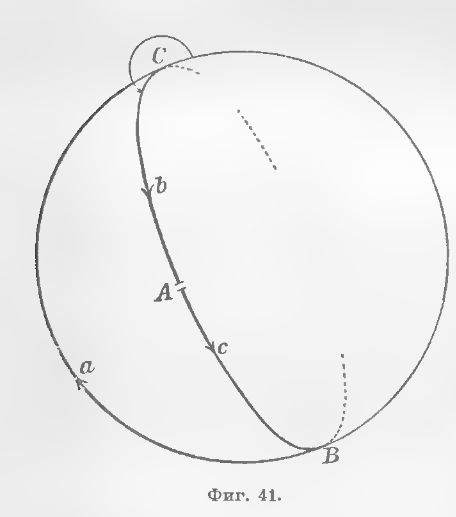
сферѣ направленію вращенія возрастетъ или уменьшится на 2π. Такимъ образомъ, k оборотовъ приводятъ къ подстановкѣ:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ a+2k\pi & b & c & \alpha+2k\pi & \beta & \gamma \end{pmatrix};$$

такимъ же образомъ можно осуществить обѣ аналогичныя подстановки. Если мы теперь произведемъ аналогичныя преобразованія полярнаго треугольника и примемъ во вниманіе, что непрерывной деформаціи полярнаго треугольника соотвѣтствуетъ непрерывная же деформація первоначальнаго треугольника, то мы убѣдимся, что мы имѣемъ возможность осуществить также подстановки, которыя получаются изъ указанныхъ выше путемъ замѣщенія сторонъ углами и обратно. Но изъ полученныхъ такимъ образомъ 12 подстановокъ можно составить, какъ въ этомъ легко убѣдиться, каждую подстановку ($\mathfrak{N}$). Итакъ, эквивалентные треугольники всегда могутъ быть преобразованы другъ въ друга.

2) Доказательство второй части мы вновь раздѣлимъ на двѣ части.

a) Мы докажемъ, во первыхъ, что собственные приведенные типы, отличающіеся только направленіемъ сторонъ, а не установленнымъ на сферѣ направленіемъ вращенія, могутъ быть непрерывно преобразованы одинъ въ другой. Слѣдовательно, типы, начерченные на таблицѣ II въ верхнемъ ряду, могутъ быть преобразованы другъ въ друга, равно какъ и типы, начерченные въ той же таблицѣ въ нижнемъ ряду. То же самое относится и къ несобственнымъ треугольникамъ, на таблицѣ III.



Фиг. 41.

b) Во вторыхъ, мы покажемъ, что между типами верхняго и нижняго рядовъ какъ на таблицѣ II, такъ и на таблицѣ III также возможенъ непрерывный переходъ. Мы будемъ обозначать нижніе горизонтальные ряды на нашихъ таблицахъ черезъ α, верхніе черезъ β.

a) Мы будемъ исходить отъ приведеннаго треугольника $E^{(0)}_{00}$ и совершенно такъ же, какъ выше, придадимъ ему такую форму, чтобы $a=\pi$ (фиг. 39, 40). Затѣмъ, сохраняя точки B и C, мы повернемъ сторону a на полъ-оборота; при надлежащемъ выборѣ направленія этого оборота углы β и γ нарастутъ тогда на π; въ полученномъ такимъ образомъ треугольникѣ проведемъ сторону a въ направленіи, обратномъ прежнему, такъ что она перейдетъ въ

$2\pi - a$; наконецъ, возвратимъ вершину C въ ея первоначальное положеніе. Тогда нашъ треугольникъ $E_{00}^{(6)}$ перейдетъ въ треугольникъ $E_{10}^{(1)}$ со сторонами и углами $2\pi - a$, b, c; α, $\pi + \beta$, $\pi + \gamma$. Весь этотъ процессъ мы обозначимъ черезъ E_1; точно такъ же черезъ E_2 и E_3 обозначимъ процессы, которые изъ него получаются циклическимъ замѣщеніемъ.

Каждый процессъ E_k непрерывно преобразовываетъ треугольникъ $E_{00}^{(0)}$ въ треугольникъ $E_{10}^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) и обратно.

Въ справедливости второй части этого утвержденія легко убѣдиться.

Если мы, такимъ образомъ, произведемъ процессъ E_2 надъ треугольникомъ $E_{00}^{(0)}$, то мы получимъ треугольникъ $E_{10}^{(2)}$; если же надъ послѣднимъ треугольникомъ произведемъ процессъ E_3, то тѣ же соображенія, что и выше, обнаружатъ, что мы получимъ треугольникъ $E_{00}^{(1)}$. Стороны и углы этого треугольника будутъ: a, $2\pi - b$, $2\pi - c$, $2\pi + \alpha$, $\pi + \beta$, $\pi + \gamma$. Нужно замѣтить, что мы получаемъ собственный типъ $E_{00}^{(1)}$ благодаря прибавленію 2π къ углу α. Мы будемъ говорить, что мы „составили“ этотъ процессъ изъ процессовъ E_2 и E_3 и будемъ его обозначать символически произведеніемъ E_2E_3. Это та же терминологія, которой мы уже пользовались въ теоріи группъ перестановокъ (т. I, § 50). Если, стало быть, i, k, l означаютъ числа 1, 2, 3 въ любой послѣдовательности, то мы можемъ сказать: процессъ E_iE_k непрерывно преобразовываетъ треугольникъ $E_{00}^{(0)}$ въ треугольникъ $E_{00}^{(l)}$.

Точно такъ же легко усмотрѣть, что процессъ $E_1E_2E_3$ непрерывно преобразуетъ треугольникъ $E_{00}^{(0)}$ въ треугольникъ $E_{10}^{(0)}$. Стороны и углы этого треугольника суть: $2\pi - a$, $2\pi - b$, $2\pi - c$, $2\pi + \alpha$, $2\pi + \beta$, $2\pi + \gamma$; благодаря прибавленію 2π ко всѣмъ угламъ треугольникъ остается собственнымъ.

Такимъ образомъ, утвержденіе a) для ряда (α) доказано; но аналогичныя разсужденія можно провести также для ряда (β) и для соотвѣтствующихъ рядовъ несобственныхъ треугольниковъ.

Теперь становится также яснымъ, почему мы выбрали „приведенные“ треугольники въ томъ видѣ, какъ они начерчены на нашихъ таблицахъ; выборъ сдѣланъ такъ, что треугольники, помѣщенные въ одномъ горизонтальномъ ряду, преобразовываются одинъ въ другой непосредственно однимъ изъ процессовъ E.

b) Доказательство, что и ряды (α) и (β) непрерывно преобразовываются одинъ въ другой, легко выполняется при помощи полярнаго преобразованія. Процессъ $E_1E_2E_3$ (помимо прибавленія 2π ко всѣмъ угламъ, при которомъ треугольникъ остается собственнымъ) мѣняетъ направленія всѣхъ сторонъ. Поэтому, согласно § 39, 10, этотъ процессъ

для полярнаго треугольника равносиленъ измѣненію стороны вращенія на сферѣ; при прибавленіи 2π ко всѣмъ тремъ сторонамъ полярнаго треугольника, онъ также остается собственнымъ. Треугольникъ, который мы такимъ образомъ получаемъ, еще не приведенный, — но при помощи подстановки вида (N) онъ всегда можетъ быть непрерывно преобразованъ въ приведенный треугольникъ. Этимъ путемъ осуществленъ переходъ отъ треугольника (α) къ треугольнику (β), и мы можемъ сказать:

Процессъ, полярный процессу $E_1E_2E_3$, непрерывно преобразуетъ рядъ (α) въ рядъ (β).

Этимъ доказана положительная часть теоремы.

4. Обращаясь теперь къ отрицательной части теоремы, замѣтимъ, что, въ виду доказанной первой части, намъ достаточно обнаружить существованіе хотя бы одной только пары сферическихъ треугольниковъ, которые не могутъ быть преобразованы другъ въ друга. Мы разсмотримъ какой-либо собственный треугольникъ, въ которомъ только $\sin\frac{1}{2}a$ и $\cos\frac{1}{2}a$ не равны нулю, и несобственный треугольникъ, который получается изъ перваго прибавленіемъ 2π къ углу a. Если бы такіе треугольники могли быть непрерывно преобразованы одинъ въ другой, то уравненія (III_1) должны были бы имѣть мѣсто одновременно какъ для $\varrho = 1$, такъ и для $\varrho = -1$; но тогда мы получили бы почленнымъ сложеніемъ:

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\beta-\gamma}{2} = 0,$$

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = 0, \qquad \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 0;$$

что явно содержитъ противорѣчіе.

Такимъ образомъ доказана и отрицательная часть теоремы.

5. Теорема Стюди приводитъ къ новому опредѣленію собственныхъ и несобственныхъ треугольниковъ.

Собственными называются всѣ тѣ треугольники, которые могутъ быть получены изъ Эйлерова треугольника непрерывной деформаціей. Всѣ остальные называются несобственными.

§ 48. Аналитическая постановка вопроса. Родственные треугольники. Треугольники Стюди.

1. Процессы E_k $(k = 1, 2, 3)$, которыми мы пользовались въ предыдущемъ параграфѣ, можно безъ труда выразить аналитически. Какъ было выяснено на стр. 96 и 97, эти процессы равносильны подстановкамъ:

$$E_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ 2\pi - a & b & c & \alpha & \pi + \beta & \pi + \gamma \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ a & 2\pi - b & c & \pi + \alpha & \beta & \pi + \gamma \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & 2\pi - c & \pi + \alpha & \pi + \beta & \gamma \end{pmatrix};$$

мы будемъ ихъ впредь дѣйствительно отождествлять съ этими подстановками. Нагляднѣе эти подстановки могутъ быть выражены слѣдующей таблицей, въ которой новые углы и стороны обозначены черезъ a', b', c', α', β', γ'.

	a'	b'	c'	α'	β'	γ'	
E_1	$2\pi - a$	b	c	α	$\pi + \beta$	$\pi + \gamma$	
E_2	a	$2\pi - b$	c	$\pi + \alpha$	β	$\pi + \gamma$	(E)
E_3	a	b	$2\pi - c$	$\pi + \alpha$	$\pi + \beta$	γ	

Если только $k \neq l$, то каждая изъ подстановокъ E_l преобразовываетъ любой типъ ряда (α) или (β) въ слѣдующій. При $k = l$ каждый треугольникъ преобразовывается въ эквивалентный треугольникъ.

Если мы будемъ обозначать эквивалентность (§ 46, 3) знакомъ $\sim$, а тождественную подстановку (т. I, § 50) черезъ J, то

$$E_1^2 = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c & \alpha & 2\pi + \beta & 2\pi + \gamma \end{pmatrix} \sim J,$$

такъ что всегда

$$E_k^2 \sim J; \qquad {\scriptstyle (k = 1, 2, 3)} \qquad (1)$$

геометрическое значеніе этой формулы, какъ и слѣдующихъ, было уже выяснено. Далѣе мы получаемъ:

	a'	b'	c'	α'	β'	γ'	
$E_2 E_3$	a	$2\pi - b$	$2\pi - c$	$2\pi + \alpha$	$\pi + \beta$	$\pi + \gamma$	
$E_3 E_1$	$2\pi - a$	b	$2\pi - c$	$\pi + \alpha$	$2\pi + \beta$	$\pi + \gamma$	(2)
$E_1 E_2$	$2\pi - a$	$2\pi - b$	c	$\pi + \alpha$	$\pi + \beta$	$2\pi + \gamma$	

$$E_k E_l = E_l E_k, \qquad {\scriptstyle (k, l = 1, 2, 3;\ k \neq l)} \qquad (3)$$

$$E_1 E_2 E_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ 2\pi - a & 2\pi - b & 2\pi - c & 2\pi + \alpha & 2\pi + \beta & 2\pi + \gamma \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ -a & -b & c & \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

2. На стр. 97 мы пользовались далѣе процессомъ, полярнымъ относительно $E_1 E_2 E_3$, чтобы отъ ряда (α) перейти къ ряду (β). Но наше основное положенiе, что каждой операцiи на сферѣ соотвѣтствуетъ полярная ей операцiя, требуетъ, чтобы мы непосредственно ввели процессы, полярные относительно операцiи E_k ($k = 1, 2, 3$). Это чисто формальнымъ путемъ приводитъ насъ къ слѣдующимъ формуламъ:

	a'	b'	c'	α'	β'	γ'
$\mathbf{E}_1$	a	$\pi + b$	$\pi + c$	$2\pi - \alpha$	β	γ
$\mathbf{E}_2$	$\pi + a$	b	$\pi + c$	α	$2\pi - \beta$	γ
$\mathbf{E}_3$	$\pi + a$	$\pi + b$	c	α	β	$2\pi - \gamma$

(**E**)

$$\mathbf{E}_k^2 \sim J \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1'}$$

	a'	b'	c'	α'	β'	γ'
$\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$	$2\pi + a$	$\pi + b$	$\pi + c$	α	$2\pi - \beta$	$2\pi - \gamma$
$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_1$	$\pi + a$	$2\pi + b$	$\pi + c$	$2\pi - \alpha$	β	$2\pi - \gamma$
$\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$	$\pi + a$	$\pi + b$	$2\pi + c$	$2\pi - \alpha$	$2\pi - \beta$	γ

(2′)

$$\mathbf{E}_k\mathbf{E}_l = \mathbf{E}_l\mathbf{E}_k, \qquad (k, l = 1, 2, 3;\ k \neq l) \tag{3'}$$

$$\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ 2\pi + a & 2\pi + b & 2\pi + c & 2\pi - \alpha & 2\pi - \beta & 2\pi - \gamma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c & -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{4'}$$

$$E_k\mathbf{E}_l \sim \mathbf{E}_l E_k. \qquad (k, l = 1, 2, 3) \tag{5}$$

Что въ случаѣ (5) имѣетъ мѣсто эквивалентность, а не равенство, это показываетъ примѣръ:

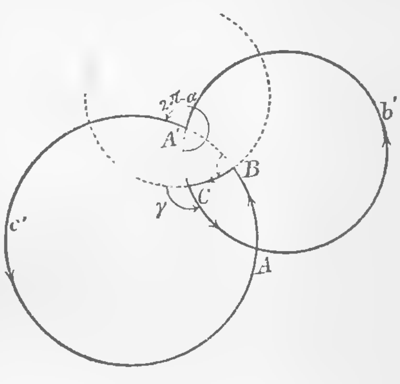
$$\mathbf{E}_1 E_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ a - \pi & b & \pi + c & 3\pi - \alpha & \beta & \pi + \gamma \end{pmatrix},$$

$$E_2 \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ a - 3\pi & b & \pi + c & \pi - \alpha & \beta & \pi + \gamma \end{pmatrix};$$

эти двѣ подстановки отличаются одна отъ другой подстановкой вида ($\mathfrak{N}$).

3. Если мы заинтересуемся геометрическимъ значенiемъ подстановокъ $\mathbf{E}_k$, то окажется, что между треугольниками, которые мы разсматривали до сихъ поръ, не найдется ни одного, который соотвѣтствовалъ бы подстановкѣ $\mathbf{E}_k$. Это ясно геометрически. Въ

самомъ дѣлѣ, процессъ E_1, по существу, производитъ только обращеніе направленія одной лишь стороны a. Полярный процессъ долженъ измѣнить направленіе вращенія на сферѣ, но только для одного лишь угла α; иными словами, уголъ α замѣняется черезъ $2\pi - \alpha$, углы же β и γ остаются безъ измѣненія. Это измѣненіе получится, если мы замѣнимъ точку A діаметрально противоположной точкой A' (§ 38, 5). Подстановка E_1 преобразовываетъ, слѣдовательно, треугольникъ ABC въ такой треугольникъ $A'BC$, одна изъ вершинъ котораго A' не принадлежитъ къ числу тѣхъ неизмѣнныхъ вершинъ, которыми мы пользовались до сихъ поръ (фиг. 42).



Фиг. 42.

4. Важно, однако, замѣтить, что этимъ путемъ мы получаемъ, правда, новые треугольники, но отнюдь не новые типы треугольниковъ. Такъ, напримѣръ, треугольникъ типа $E_{00}^{(0)}$ преобразуется подстановкой E_1 въ треугольникъ типа $E_{00}^{(1)}$, какъ это видно на фиг. 42. Это обстоятельство находитъ себѣ общее выраженіе въ слѣдующемъ предложеніи, въ справедливости котораго очень легко убѣдиться. Пусть E означаетъ подстановку, какимъ-либо образомъ составленную изъ подстановокъ E_k, а E – подстановку, соотвѣтствующимъ образомъ составленную изъ подстановокъ E_k; если подстановка E преобразовываетъ типъ $T_{\delta\varepsilon}^{(h)}$ ($h = 0, 1, 2, 3$; $\delta, \varepsilon = 0, 1$) въ $T_{\delta'\varepsilon'}^{(i)}$, то подстановка E преобразовываетъ его въ типъ $T_{\varepsilon'\delta'}^{(i)}$; собственные типы при этомъ всегда переходятъ въ собственные же, несобственные – въ несобственные.

Отсюда слѣдуетъ, что мы могли бы для полученія всѣхъ возможныхъ треугольниковъ пользоваться въ качествѣ „образующихъ" процессовъ не операціями E_k, а операціями E_k; это было бы только нѣсколько менѣе наглядно. За приведенные типы треугольниковъ тогда было бы цѣлесообразнѣе принять другіе, именно, такого рода, какъ вторая изъ фигуръ на стр. 86.

5. Мы видимъ теперь, что появленіе подстановокъ E_k приводитъ къ необходимости ввести также въ разсмотрѣніе и противоположныя точки A', B', C'. Такимъ образомъ, на первый планъ выступаютъ уже не точки A, B, C, какъ это было до сихъ поръ, а проектирующій трехгранный уголъ $(r_a r_b r_c)$.

Для ближайшихъ нашихъ соображеній было бы цѣлесообразно разсматривать эквивалентные треугольники, какъ тождественные; тогда три точки на сферѣ опредѣляютъ 16 собственныхъ и 16 несобственныхъ треугольниковъ (§ 46, 4).

Пусть теперь $(r_a r_b r_c)$ будетъ трехгранный уголъ, ребра котораго вырѣзываютъ на сферѣ точки A, B, C, A', B', C'. Изъ нихъ можно тогда составить 8 комбинацій по 3, если, естественно, не вводить въ одну и ту же комбинацію двухъ противоположныхъ точекъ, какъ A и A'.

Такимъ образомъ, мы указаннымъ путемъ получимъ $8 \cdot 16 = 128$ собственныхъ и 128 несобственныхъ треугольниковъ, которые всѣ принадлежатъ къ тому же трехгранному углу.

Соотвѣтственно этому мы будемъ для наглядности называть трехгранный уголъ „родомъ“ этихъ треугольниковъ, а самые треугольники „родственными“.

Если мы теперь, съ другой стороны, возвратимся къ аналитическимъ выраженіямъ нашихъ преобразованій и будемъ при этомъ помнить, что мы считаемъ эквивалентные треугольники тождественными, то мы замѣтимъ, что въ виду соотношеній (1), (1'), (3), (3'), (5) самая общая подстановка S можетъ быть представлена въ видѣ

$$S \sim E_1^{e_1} E_2^{e_2} E_3^{e_3} \mathsf{E}_1^{\varepsilon_1} \mathsf{E}_2^{\varepsilon_2} \mathsf{E}_3^{\varepsilon_3} \qquad (6)$$
$$(e_1,\ e_2,\ e_3;\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 = 0,\ 1).$$

Въ общемъ это составляетъ 64 различныхъ подстановокъ. При такомъ аналитическомъ выраженіи изъ одного треугольника получается такимъ образомъ 64 собственныхъ родственныхъ треугольника или 64 несобственныхъ, смотря по тому, былъ ли исходный треугольникъ собственнымъ или несобственнымъ.

Геометрическія соображенія даютъ, такимъ образомъ, для каждаго рода вдвое больше треугольниковъ, чѣмъ аналитическія. Это происходитъ просто оттого, что два симметрично расположенныхъ треугольника, какъ, напримѣръ, ABC и $A'B'C'$, имѣющіе тѣ же углы и стороны, отличаются другъ отъ друга только геометрически, а не аналитически; аналитическія выраженія даютъ вѣдь только величины сторонъ и угловъ.

6. Чтобы достигнуть и здѣсь единства, мы введемъ послѣднее обобщеніе понятія о треугольникѣ и такимъ образомъ придемъ къ „треугольникамъ Стюди“.

Подъ треугольниками мы будемъ разумѣть совокупность сторонъ a, b, c и угловъ α, β, γ, не касаясь случайнаго расположенія ихъ на сферѣ.

Сообразно этому всѣ треугольники, конгруэнтные одному и тому же треугольнику и симметричные ему, поскольку они имѣютъ тѣ же стороны и углы, мы будемъ разсматривать, какъ одинъ и тотъ же треугольникъ.

7. Если мы теперь эквивалентные треугольники будемь вновь разсматривать, какъ различные, то мы сможемъ выразить наши результаты слѣдующимь образомъ:

Совокупность всѣхъ треугольниковъ, принадлежащихь одному и тому же роду, распадается на 64 группы собственныхъ и 64 группы несобственныхъ треугольниковъ. Мы можемъ получить всѣ эти треугольники, если къ одному изъ нихъ примѣнимъ 64 подстановки, содержащіяся въ схемѣ

$$S = E_1^{e_1} E_2^{e_2} E_3^{e_3} \mathsf{E}_1^{\varepsilon_1} \mathsf{E}_2^{\varepsilon_2} \mathsf{E}_3^{\varepsilon_3}$$
$$(e_1, e_2, e_3; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = 0, 1);$$

изъ 64 треугольниковъ, къ которымъ мы такимъ образомъ придемъ, мы получимъ всѣ родственные треугольники при помощи подстановокъ ($\mathfrak{N}$) и ($\mathfrak{N}'$); при этомъ подстановки ($\mathfrak{N}$) даютъ собственные треугольники отъ собственнаго исходнаго треугольника и несобственные отъ несобственнаго; напротивъ, подстановки ($\mathfrak{N}'$) приводятъ отъ собственнаго исходнаго треугольника къ несобственнымъ и обратно.

Если мы имѣли первоначально Эйлеровъ треугольникъ, стороны и углы котораго измѣняются между 0 и π, то подстановка ($S\mathfrak{N}$) даетъ всѣ вообще существующіе собственные треугольники, а подстановка ($S\mathfrak{N}'$) даетъ всѣ несобственные треугольники.

Что при этомъ многократно появляются одни и тѣ же по типу треугольники, такъ какъ подстановки E_k не вносятъ, по существу, ничего новаго, — мы уже указали выше.

8. Въ заключеніе мы удѣлимъ еще мѣсто замѣчанію о возможности и другихъ обобщеній понятія о треугольникѣ. При томъ понятіи о треугольникѣ, которое установлено Стюди, точкой отправленія все-таки служитъ геометрическій образъ, хотя существеннымъ здѣсь и признается нѣчто аналитическое, именно — величины элементовъ $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. Отсюда остается уже только одинъ шагъ къ тому, чтобы совершенно отвлечься отъ геометрическаго образа и дать чисто аналитическое опредѣленіе:

„Подъ сферическимъ треугольникомъ мы будемъ разумѣть совокупность шести величинъ $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, которыя связаны между собою уравненіями (I) (стр. 67), выражающими теорему косинусовъ на сферѣ".

Такое обобщеніе даетъ возможность ввести также треугольники съ комплексными сторонами и углами. Шиллингу *) удалось дать геометрическую интерпретацію даже для такихъ „комплексныхъ треуголь-

*) Schilling, „Beiträge zur geom. Theorie der Schwarzschen s-Funktion". Math. Ann., Bd. 44. — Ср. также Schoenflies, „Über Kreisbogendreiecke" и т. д. — тамъ же.

никовъ"; онъ воспользовался для этого неевклидовымъ мѣроопредѣленіемъ, абсолютной поверхностью котораго служитъ сфера (§ 11, 18). Ребра проектирующаго трехграннаго угла въ этомъ случаѣ не проходятъ черезъ центръ сферы и даже не пересѣкаются вообще [7]).

Однако, эти послѣнія соображенія пріобрѣтаютъ значеніе только въ теоріи функцій. Здѣсь же, гдѣ мы ограничиваемся только вопросами элементарной математики, мы должны оставить ихъ въ сторонѣ.

§ 49. Примѣненіе теоріи группъ.

1. Предыдущіе результаты гораздо легче обобщить, если воспользоваться понятіемъ о группѣ; строго говоря, мы фактически все время уже пользовались этимъ основнымъ понятіемъ.

Какъ въ первомъ томѣ мы разсматривали группы, „элементами" которыхъ служили перестановки (§ 52), такъ здѣсь мы займемся группами, элементами которыхъ служатъ линейныя подстановки, — „группами подстановокъ". Группы перестановокъ представляютъ, очевидно, лишь частный случай группъ подстановокъ.

2. Подстановки, которыя мы выше разсматривали, всегда имѣли видъ:

$$a' = p_a a + q_a, \quad \alpha' = p_\alpha \alpha + q_\alpha,$$
$$b' = p_b b + q_b, \quad \beta' = p_\beta \beta + q_\beta,$$
$$c' = p_c c + q_c, \quad \gamma' = p_\gamma \gamma + q_\gamma,$$

такъ что онѣ могутъ быть выражены въ общей формѣ

$$x' = px + q; \tag{1}$$

мы будемъ обозначать ихъ буквой S, а точнѣе символомъ $[p, q]$; при этомъ мы всегда будемъ считать p отличнымъ отъ нуля; помимо же этого p и q могутъ пока имѣть произвольныя значенія.

Изъ двухъ подстановокъ

$$\begin{aligned} x' &= p\,x + q, \\ x'' &= p'x' + q' \end{aligned} \tag{2}$$

получается третья, „составленная" изъ нихъ (т. I. стр. 178 и д.):

$$\left.\begin{aligned} x'' &= p''x + q'', \\ p'' &= pp', \\ q'' &= p'q + q', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[7]) Нужно сказать, что идея положить въ основу совокупность элементовъ, связанныхъ заданными уравненіями, и таковую разсматривать, какъ треугольникъ, принадлежитъ Лобачевскому. Такую именно постановку вопроса мы находимъ у него въ „Воображаемой Геометріи".

что мы будемъ выражать символически

$$\left. \begin{array}{r} SS' = S'', \\ \text{или точнѣе:}\ [p,\ q]\cdot[p',\ q'] = [p'',\ q''] \end{array} \right\} \qquad (4)$$

3. Подстановка $[1,\ 0] = J$ есть тождественная подстановка; отъ составленія съ нею никакая подстановка не измѣняется:

$$SJ = JS = S. \qquad (5)$$

4. Каждой подстановкѣ S отвѣчаетъ одна и только одна подстановка S^{-1} такого свойства, что

$$S^{-1}S = J.$$

Чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно положить въ выраженіяхъ (3)

$$p' = \frac{1}{p},\quad q' = -\frac{q}{p}.$$

Подстановка S^{-1} называется обратной относительно подстановки S.

Относительно обратныхъ подстановокъ и подстановокъ съ отрицательными показателями справедливо все, изложенное въ томѣ I (въ § 50 п. п. 9—11).

Если p и q представляютъ собой не произвольныя числа, а чѣмъ-либо ограниченныя (напримѣръ, цѣлыя), то, какъ показываютъ послѣднія уравненія, данной подстановкѣ не всегда отвѣчаетъ обратная.

5. Въ примѣненіи къ составленію подстановокъ законъ перемѣстительный вообще несправедливъ, какъ это видно уже изъ того, что къ числу подстановокъ принадлежатъ и перестановки; такимъ образомъ, подстановка $S_h S_k$ можетъ быть отлична отъ подстановки $S_k S_h$.

Напротивъ, законъ сочетательный

$$S_i(S_h S_k) = (S_i S_h) S_k,$$

всегда имѣетъ мѣсто, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться непосредственнымъ вычисленіемъ.

6. Совершенно такъ же, какъ въ случаѣ группы перестановокъ, мы будемъ теперь говорить:

Система подстановокъ

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$$

образуетъ группу подстановкѣ $\mathfrak{S}$, если она удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ:

1) Если S_h и S_k суть двѣ подстановки системы, различныя или тождественныя, то въ составъ той же системы всегда входитъ подстановка

$$S_h S_k = S_l,$$

составленная изъ нихъ.

2) Каждой подстановкѣ S_k въ той же системѣ $\mathfrak{S}$ отвѣчаетъ обратная подстановка S_k^{-1}.

Въ виду замѣчанія, сдѣланнаго въ п. 4, условіе 2) не разумѣется само собой, а должно быть явно выражено.

Но въ тѣхъ подстановкахъ, съ которыми намъ придется имѣть дѣло, $p = \pm 1$, а каждому значенію q отвѣчаетъ противоположное значеніе $-q$. Условіе 2) для нашихъ подстановокъ будетъ поэтому всегда выполняться.

Въ виду опредѣленія обратной подстановки изъ условія 2) [8]) вытекаетъ:

Каждая группа содержитъ тождественную подстановку J.

Часть подстановокъ группы $\mathfrak{S}$ можетъ иногда и сама по себѣ составлять группу; такая часть называется „дѣлителемъ“ группы, или ея „подгруппой“.

7. Какъ на основное различіе по сравненію съ группой перестановокъ, укажемъ, что группа подстановокъ можетъ содержать безчисленное множество подстановокъ.

Сообразно этому мы будемъ различать безконечныя группы, состоящія изъ безконечнаго числа подстановокъ, и конечныя, содержащія ограниченное число ихъ.

Намъ придется встрѣчать примѣры тѣхъ и другихъ группъ.

Если группа (конечная или безконечная) обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что для любыхъ двухъ ея подстановокъ справедливъ законъ перемѣстительный, такъ что всегда

$$S_h S_k = S_k S_h,$$

то она называется „Абелевой“ или „перемѣстительной“ группой.

8. Если группа конечна, то число различныхъ подстановокъ, входящихъ въ ея составъ, называется порядкомъ группы.

Къ конечнымъ группамъ подстановокъ примѣнимы всѣ выводы § 52-го тома I. Въ частности:

Каждой подстановкѣ S отвѣчаетъ нѣкоторый наименьшій показатель s, при которомъ

$$S^s = J; \tag{6}$$

это число s называется „порядкомъ“ подстановки S.

[8]) Въ связи, конечно, съ условіемъ 1).

Группа называется „инволюторной“, если она содержитъ исключительно подстановки второго порядка; такая группа будетъ всегда перемѣстительной [9]).

Если въ конечной группѣ $\mathfrak{S}$ порядка g содержится подгруппа $\mathfrak{T}$ порядка h, то h есть дѣлитель числа g.

9. Если изъ трехъ подстановокъ S_h, S_k, S_l конечной или безконечной группы $\mathfrak{S}$ даны какія-либо двѣ, то онѣ всегда однозначно опредѣляютъ третью группу такимъ образомъ, что

$$S_h S_k = S_l. \tag{7}$$

Если неизвѣстной является, напримѣръ, подстановка S_k, то мы составимъ подстановку

$$S_h^{-1}(S_h S_k) = S_h^{-1} S_l;$$

въ силу же п. 5-го отсюда слѣдуетъ:

$$S_k = S_h^{-1} S_l.$$

Аналогично, если неизвѣстна подстановка S_h, мы найдемъ:

$$S_h = S_l S_k^{-1}.$$

10. Обратимся теперь къ примѣненіямъ всѣхъ этихъ соображеній къ сферической тригонометріи.

Сначала мы разсмотримъ нѣкоторыя группы перестановокъ.

Разсмотримъ сначала полярное преобразованіе. Мы можемъ его представить въ видѣ группы $\mathfrak{P}_2$ 2-го порядка, состоящей изъ субституцій [10]):

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & a & b & c \end{pmatrix}, \quad P^2 = J.$$

[9]) Дѣйствительно, пусть S и S' будутъ произвольныя двѣ подстановки инволюторной группы; тогда SS' также будетъ подстановка группы и

$$(SS')(SS') = J.$$

Вслѣдствіе закона сочетательнаго

$$S(S'S)S' = J.$$

Поэтому

$$S[S(S'S)S']S' = SS',$$

Опять въ силу закона сочетательнаго

$$(SS)(S'S)(S'S') = SS',$$

а потому

$$S'S = SS'.$$

[10]) Мы сохраняемъ принятый въ первомъ томѣ (стр. 179 и прим. 3) терминъ „субституція“, когда рѣчь идетъ о перестановленіи элементовъ, о переходѣ отъ одной перестановки элементовъ (которые могутъ быть даже не числами, а какими угодно предметами) къ другой. Когда же рѣчь идетъ о замѣщеніи въ формулѣ одного перемѣннаго другимъ, аналитически отъ него зависящимъ, мы употребляемъ терминъ „подстановка“.

Сообразно этому мы можемъ сказать:

Совокупность формулъ сферической тригонометріи инваріантна относительно группы $\mathfrak{P}_2$, т. е. онѣ сохраняются, когда мы примѣняемъ къ нимъ субституціи этой группы.

Далѣе, циклическія перемѣщенія также образуютъ группу 3-го порядка $\mathfrak{C}_3$. Если мы обозначимъ двойной циклъ

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ b & c & a & \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} = (a,\ b,\ c)(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

черезъ C, то группа $\mathfrak{C}_3$ состоитъ изъ подстановокъ

$$C, \quad C^2, \quad C^3 = J.$$

По отношенію къ группѣ $\mathfrak{C}_3$ формулы сферической тригонометріи также остаются инваріантными.

Но группа $\mathfrak{C}_3$ представляетъ собой только дѣлитель группы всѣхъ перестановокъ трехъ паръ величинъ (a, α), (b, β), (c, γ). Относительно этой группы 6-го порядка наша система формулъ также инваріантна, хотя этимъ ея свойствомъ мы не пользовались.

11. Мы обращаемся теперь къ собственнымъ группамъ подстановокъ. До сихъ поръ мы разсматривали слѣдующія подстановки:

1) Подстановки M системы $\mathfrak{M}$ (§ 46, 2);
2) подстановки N и N' системы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ (§ 46, 3);
3) подстановки, которыя получаются путемъ составленія „производящихъ“ подстановокъ E_1, E_2, E_3, E_1, E_2, E_3 въ произвольныхъ комбинаціяхъ; совокупность этихъ послѣднихъ подстановокъ мы будемъ впредь обозначать черезъ $\mathfrak{G}$.

Въ виду того, что было изложено въ п. п. 1 и 2 § 48-го, мы можемъ представить самую общую подстановку системы $\mathfrak{G}$ въ видѣ:

$$E_1^{e_1} E_2^{e_2} E_3^{e_3} \mathsf{E}_1^{\varepsilon_1} \mathsf{E}_2^{\varepsilon_2} \mathsf{E}_3^{\varepsilon_3} \cdot N$$
$$(e_1,\ e_2,\ e_3;\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 = 0,\ 1).$$

Согласно опредѣленію п. 6. мы можемъ теперь сказать:

Каждая изъ системъ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$ представляетъ собой безконечную группу.

Напротивъ, система $\mathfrak{N}'$ не представляетъ собой группы въ смыслѣ опредѣленія, даннаго въ п. 6. Если мы, однако, обозначимъ черезъ N' какую-либо одну изъ подстановокъ $\mathfrak{N}'$, то система $\mathfrak{N}'$ можетъ быть

представлена въ видѣ $\mathfrak{N}N'$ [11]). Такую систему $\mathfrak{N}'$, по Веберу*), принято называвать „согруппой“ относительно группы $\mathfrak{N}$; вмѣстѣ съ тѣмъ пишутъ:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}N'.$$

Если мы примѣнимъ эти группы къ опредѣленному „исходному треугольнику“, то

группа $\mathfrak{M}$ дасть совокупность всѣхъ собственныхъ и несобственныхъ — треугольниковъ, которые принадлежатъ къ одному типу съ исходнымъ треугольникомъ;

группа $\mathfrak{N}$ дастъ совокупность всѣхъ треугольниковъ, эквивалентныхъ исходному;

согруппа $\mathfrak{N}'$ дастъ всѣ треугольники, принадлежащіе тому же типу, что и исходный треугольникъ, но не эквивалентные съ нимъ;

группа $\mathfrak{G}$ дастъ совокупность всѣхъ собственныхъ или несобственныхъ родственныхъ между собой треугольниковъ, смотря по тому, будетъ ли исходный треугольникъ собственнымъ или несобственнымъ.

Если исходный треугольникъ былъ собственный и мы обозначимъ черезъ N' опредѣленную подстановку системы $\mathfrak{N}'$, то можно сказать:

Группа $\mathfrak{G}$ и ея согруппа $\mathfrak{G}N'$ охватываютъ совокупность всѣхъ родственныхъ треугольниковъ; и именно группа $\mathfrak{G}$ охватываетъ собственные, согруппа $\mathfrak{G}N'$ - несобственные треугольники.

12. Какъ геометрически, такъ и аналитически совершенно ясно, что:

$\mathfrak{N}$ содержится въ $\mathfrak{G}$,
$\mathfrak{N}'$ „ „ $\mathfrak{G}N'$
$\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ „ „ $\mathfrak{M}$.

Сообразно этому группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{M}$ имѣютъ „общимъ дѣлителемъ“ группу $\mathfrak{N}$, а системы $\mathfrak{G}N'$ и $\mathfrak{M}$ согруппу $\mathfrak{N}'$.

Выражаясь болѣе геометрически:

Группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{M}$ имѣютъ своимъ „пересѣченіемъ“ группу $\mathfrak{N}$, системы $\mathfrak{G}N'$ и $\mathfrak{M}$ согруппу $\mathfrak{N}'$.

[11]) Подробнѣе: если мы составимъ подстановку N' послѣдовательно съ каждой подстановкой группы $\mathfrak{N}$, то мы получимъ всѣ подстановки $\mathfrak{N}'$.

*) H. Weber, „Lehrbuch der Algebra“, 2. Aufl., Braunschweig, 1899. Bd. II., § 1, ff. — Въ этомъ сочиненіи теорія конечныхъ группъ разработана въ наиболѣе общемъ видѣ.

13. Эти результаты выигрываютъ въ изяществѣ, если мы разсматриваемъ эквивалентные треугольники, не какъ различные, а какъ тождественные, – выражаясь аналитически, если смотримъ на подстановки N группы $\mathfrak{N}$, какъ на равносильныя тождественной подстановкѣ (§ 48, 5).

Безконечная группа $\mathfrak{G}$ переходитъ тогда въ конечную группу $\mathfrak{G}_{64}$, состоящую изъ 64 подстановокъ, которыя всѣ содержатся въ формѣ:

$$S = E_1^{e_1} E_2^{e_2} E_3^{e_3} \mathbf{E}_1^{\varepsilon_1} \mathbf{E}_2^{\varepsilon_2} \mathbf{E}_3^{\varepsilon_3}$$
$$(e_1,\ e_2,\ e_3;\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 = 0,\ 1).$$

Если мы примѣнимъ группу $\mathfrak{G}_{64}$ къ какому-либо треугольнику нѣкотораго рода, то мы получимъ 64 „представителя этого рода“, которые будутъ собственными или несобственными, смотря по тому, былъ ли исходный треугольникъ собственнымъ или несобственнымъ; изъ нихъ уже легко получить посредствомъ подстановокъ $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ всѣ родственные треугольники (ср. § 48, 7).

Выражаясь аналитически:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{64} \cdot \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{G} N' = \mathfrak{G}_{64} \cdot \mathfrak{N}'. \tag{8}$$

Можно легко составить подгруппы этой группы $\mathfrak{G}_{64}$, порядки которыхъ, согласно п. 8, должны быть дѣлителями числа 64.

Пусть i, k, l будутъ числа 1, 2, 3 въ любой послѣдовательности; положимъ:

$$\left.\begin{aligned} E_i E_k &= D_l, & \mathbf{E}_i \mathbf{E}_k &= \Delta_l, \\ E_1 E_2 E_3 &= T, & \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_3 &= \mathbf{T}; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

тогда мы получимъ слѣдующія замѣчательныя подгруппы 4 порядка:

$$\begin{array}{lllll} D_1 & D_2 & D_3 & J & (\mathfrak{G}_4), \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & J & (\mathfrak{G}_4'), \\ T & \mathbf{T} & T\mathbf{T} & J & (\mathfrak{H}_4), \\ D_1\Delta_1, & D_2\Delta_2, & D_3\Delta_3, & J. & \end{array}$$

Геометрическое значеніе этихъ группъ легко усмотрѣть.

Замѣчательно, что все это инволюторныя группы (п. 8).

Самыя подстановки E_1, E_2, E_3, J, какъ и полярныя относительно нихъ подстановки, не образуютъ группы; это легко уяснить себѣ также геометрически.

14. Изъ п. п. 1 и 2 § 48 слѣдуетъ:

$$D_k T \sim E_k, \quad \Delta_k \mathsf{T} \sim \mathsf{E}_k \qquad (10)$$
$$(k = 1,\ 2,\ 3).$$

Такъ какъ подстановокъ D_k, Δ_k, T, T достаточно, чтобы составить всѣ подстановки E_k и E_k, то ими можно воспользоваться въ качествѣ образующихъ; въ примѣненіи къ группѣ $\mathfrak{G}$ это имѣетъ слѣдующее значеніе:

Группа $\mathfrak{G}$ есть совокупность всѣхъ подстановокъ, которыя можно получить, неограниченно повторяя подстановки

$$D_k, \quad \Delta_k, \quad T, \quad \mathsf{T}.$$

Если мы отождествляемъ эквивалентность съ тождествомъ, то мы вновь получаемъ группу $\mathfrak{G}_{64}$.

Съ точки зрѣнія теоріи группъ этимъ образующимъ подстановкамъ слѣдуетъ датъ предпочтеніе передъ тѣми, которыми мы пользовались раньше, какъ такъ онѣ сами образуютъ группу. Далѣе легко видѣть:

Составленныя изъ подстановокъ D_k и Δ_k группы $\mathfrak{G}_4$ и $\mathfrak{G}_4'$ образуютъ группу $\mathfrak{G}_{16}$, которая также представляетъ собой подгруппу группы $\mathfrak{G}_{64}$; составляя подстановки группъ $\mathfrak{G}_{16}$ и $\mathfrak{H}_4$, мы получаемъ всю группу $\mathfrak{G}_{64}$.

15. Въ видѣ послѣдняго приложенія теоріи группъ мы дадимъ обоснованіе правила Непера (§ 43, 9) *).

Мы познакомились выше съ этимъ правиломъ, какъ чисто эмпирической сводкой формулъ прямоугольнаго треугольника. Но уже Неперъ (1614) и, въ особенности, Ламбертъ **) искали болѣе глубокихъ основаній этого правила; „доказательство Ламберта (1765) неявно пользуется понятіемъ группы“ ***).

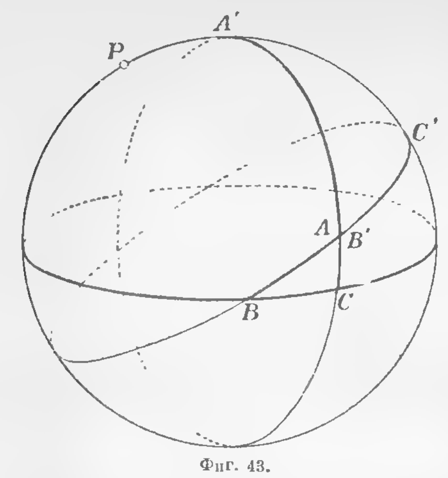
Если мы построимъ полюсы A' и P (фиг. 43) катета a и гипотенузы c прямоугольнаго сферическаго треугольника ABC и черезъ эти

*) См. Pund въ журналѣ „Mitteilungen d. math. Gesellschaft in Hamburg“. Bd. III, № 4, 1897; также Engel und Stäckel, „Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie“. Leipzig, 1899, Bd. I, p. 150 und 326. Gauss, Werke, II, p. 401 ff

**) Ламбертъ (Johann Heinrich Lambert) былъ извѣстенъ, не только какъ выдающійся математикъ, но и какъ философъ. Онъ родился въ Мюльгаузенѣ въ Эльзасѣ въ 1728 г. и умерь вь 1877 г.; онъ былъ членомъ Академіи и имѣлъ званіе „Oberbaurat“.

***) v. Braunmühl, „Geschichte der Trigonometrie“, II, p. 131.

двѣ точки проведемъ четвертую окружность большого круга, то, обозначая вершину A также черезъ B', получимъ прямоугольный треугольникъ $A'B'C'$, элементы котораго связаны съ элементами первоначальнаго треугольника уравненіями:



Фиг. 43.

$$a' = \frac{\pi}{2} - c, \quad \alpha' = \frac{\pi}{2} - a,$$

$$b' = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \beta' = \alpha,$$

$$c' = \frac{\pi}{2} - b, \quad \gamma' = \gamma - \frac{\pi}{2}.$$

Каждому прямоугольному сферическому треугольнику съ прямымъ угломъ γ соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, другой треугольникъ $A'B'C'$, который связанъ съ нимъ подстановкой:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\pi}{2} - c & \frac{\pi}{2} - \beta & \frac{\pi}{2} - b & \frac{\pi}{2} - a & \alpha & \gamma \end{pmatrix}.$$

Замѣняя γ его значеніемъ $\pi/2$, мы можемъ написать эту подстановку въ видѣ цикла (ср. т. I, § 51):

$$A = \left(\alpha, \ \frac{\pi}{2} - a, \ c, \ \frac{\pi}{2} - b, \ \beta\right).$$

Это циклъ 5 порядка, такъ что подстановки

$$A \quad A^2 \quad A^3 \quad A^4 \quad A^5 = J$$

образуютъ группу перестановокъ $\mathfrak{g}_5$ 5-го порядка. Въ качествѣ „образующей“ этой группы можно взять любую изъ ея подстановокъ. Если возьмемъ для этой цѣли A^2 и положимъ $A^2 = B$, такъ что

$$B = \left(\alpha, \ c, \ \beta, \ \frac{\pi}{2} - a, \ \frac{\pi}{2} - b\right),$$

то группа $\mathfrak{g}_5$ состоитъ изъ подстановокъ:

$$B \quad B^2 \quad B^3 \quad B^4 \quad B^5 = J. \qquad (\mathfrak{B})$$

Элементы, которые входятъ въ субституціи ($\mathfrak{B}$) (это тѣ же, которые мы выше на стр. 76 расположили по окружности), называются „круговыми элементами“.

Геометрическая интерпретація этой группы $\mathfrak{g}_5$ приводитъ къ слѣдующему предложенію:

Каждому прямоугольному треугольнику съ прямымъ угломъ γ соотвѣтствуютъ еще 4 другихъ, которые получаются изъ него повторнымъ замѣщеніемъ „круговыхъ элементовъ“, содержащихся въ подстановкахъ ($\mathfrak{B}$).

Каждое соотношеніе между круговыми элементами остается инваріантнымъ относительно этихъ замѣщеній.

Но два изъ такого рода соотношеній вытекаютъ непосредственно изъ теоремы косинусовъ, именно:

$$\cos c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right),$$

$$\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta.$$

Примѣняя наше предложеніе къ этимъ формуламъ, мы непосредственно получаемъ правило Непера.

§ 50. Формулы Льюилье-Серре.

1. Изъ первой формулы Деламбра (стр. 80 (III_1 a)) почленнымъ сложеніемъ и вычитаніемъ получаемъ:

$$\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{b-c}{2} - \varrho\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b-c}{2} + \varrho\cos\frac{a}{2}},$$

гдѣ

$$\varrho = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \text{для} \begin{cases} \text{собственныхъ} \\ \text{несобственныхъ} \end{cases} \text{треугольниковъ.}$$

Примѣняя теорему сложенія, получаемъ:

$$\frac{\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}\cos\frac{\beta+\gamma+\alpha}{4}}{\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}\sin\frac{\beta+\gamma+\alpha}{4}} = \left(\frac{\sin\frac{a+b-c}{4}\sin\frac{c+a-b}{4}}{\cos\frac{a+b-c}{4}\cos\frac{c+a-b}{4}}\right)^{\varrho}.$$

Производя соотвѣтствующія преобразованія надъ остальными формулами Деламбра и вводя обозначенія, содержащіяся въ уравненіяхъ (4) § 42-го, мы получаемъ:

первую систему формулъ Льюилье-Серре *).

$$
\left.\begin{array}{ll}
(\mathrm{H}_1)\left\{\begin{array}{ll}
\operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_1}{2}=\left(\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}\right)^{\varrho} & \operatorname{tg}\frac{\sigma_2}{2}\operatorname{cotg}\frac{\sigma_3}{2}=\left(\operatorname{cotg}\frac{s_2}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}\right)^{\varrho}\\
\operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{cotg}\frac{\sigma_1}{2}=\left(\operatorname{cotg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\right)^{\varrho} & \operatorname{tg}\frac{\sigma_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_3}{2}=\left(\operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\right)^{\varrho}
\end{array}\right.\\
(\mathrm{H}_2)\left\{\begin{array}{ll}
\operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_2}{2}=\left(\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\right)^{\varrho} & \operatorname{tg}\frac{\sigma_3}{2}\operatorname{cotg}\frac{\sigma_1}{2}=\left(\operatorname{cotg}\frac{s_3}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\right)^{\varrho}\\
\operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{cotg}\frac{\sigma_2}{2}=\left(\operatorname{cotg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\right)^{\varrho} & \operatorname{tg}\frac{\sigma_3}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_1}{2}=\left(\operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\right)^{\varrho}
\end{array}\right.\\
(\mathrm{H}_3)\left\{\begin{array}{ll}
\operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_3}{2}=\left(\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\right)^{\varrho} & \operatorname{tg}\frac{\sigma_1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\sigma_2}{2}=\left(\operatorname{cotg}\frac{s_1}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\right)^{\varrho}\\
\operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{cotg}\frac{\sigma_3}{2}=\left(\operatorname{cotg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}\right)^{\varrho} & \operatorname{tg}\frac{\sigma_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_2}{2}=\left(\operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}\right)^{\varrho}
\end{array}\right.
\end{array}\right|\ (\mathrm{H})
$$

Нельзя не указать, что въ системѣ (Н) формулы имѣютъ для собственныхъ и несобственныхъ треугольниковъ существенно различное строеніе; именно, вмѣсто тангенсовъ отъ s_ν появляются котангенсы и обратно (см. подстрочное примѣчаніе на стр. 84).

2. Формулы (Н) могутъ быть сведены въ одну. Именно, изъ уравненій (H_1), или (H_2), или (H_3) находимъ:

$$\prod_{\nu=0}^{3}\operatorname{tg}\frac{\sigma_\nu}{2}=\left(\prod_{\nu=0}^{3}\operatorname{tg}\frac{s_\nu}{2}\right)^{\varrho}=M^2. \tag{1}$$

Далѣе получаемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_k}{2}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}\operatorname{tg}\frac{s_k}{2}\right)^{\varrho}=M^2 \tag{2}$$
$$(i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Если мы выберемъ $i=k$, то, въ виду соотношеній (2), мы можемъ опредѣлить знакъ корня тѣмъ, что положимъ

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}\right)^{\varrho}=M \tag{3}$$
$$(i=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Если подставимъ сюда значеніе M изъ уравненій (1), то мы получимъ эквивалентную первой

*) Simon L'Huilier жилъ 1750—1840 г.; былъ профессоромъ математики въ Женевѣ. — J. A. Serret, 1819—1885, былъ профессоромъ въ Collège de France и членомъ Парижской Академіи.

вторую систему формулъ Льюилье-Серре:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma_i}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{s_i}{2}\right)^{\varrho}=\sqrt{\prod_{\nu=0}^{3}\operatorname{tg}\frac{\sigma_\nu}{2}}=\left(\sqrt{\prod_{\nu=0}^{3}\operatorname{tg}\frac{s_\nu}{2}}\right)^{\varrho}. \qquad \text{(IV)}$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

Знакъ корня здѣсь, естественно, не находится ни въ какой связи съ подраздѣленіемъ треугольниковъ на собственные и несобственные. Для Эйлеровыхъ треугольниковъ корень постоянно имѣетъ здѣсь положительное значеніе.

Формулы (IV) даютъ возможность многообразно опредѣлять углы по даннымъ сторонамъ и обратно. Объ этомъ подробнѣе въ отдѣлѣ D.

3. Къ исторіи формулъ Льюилье-Серре *). Льюилье принадлежитъ формула, которая получается, если въ уравненіяхъ (IV) положить $\varrho=+1$ и $i=0$; случаи же $\varrho=+1$, $i=1, 2, 3$ были впервые даны Серре въ его „Traité de Trigonométrie“. Чрезвычайно изящная сводка (IV) формулъ Льюилье-Серре принадлежатъ Стюди (l. c., p. 130), который, впрочемъ, разработалъ только случай $\varrho=+1$. Полная симметрія формулъ (IV) относительно индексовъ $i=0, 1, 2, 3$ обусловливается тѣмъ обстоятельствомъ, что Стюди обозначаетъ черезъ $2s_0$ не сумму $a+b+c$, какъ это дѣлаютъ обыкновенно, а $2\pi-(a+b+c)$, и соотвѣтственно черезъ σ_0 обозначаетъ $2\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$.

Выводъ формулъ Льюилье-Серре изъ формулъ Деламбра почленнымъ сложеніемъ и вычитаніемъ, по Браунмюлю, принадлежитъ Лобатто (Lobatto).

4. Формула (1) приводитъ къ очень простому доказательству предложенія, доказаннаго уже въ § 45, что въ трехъ системахъ Деламбра (III_k) $(k=1, 2, 3)$ коэффиціентъ ϱ всегда одновременно равенъ $+1$ или -1. Въ самомъ дѣлѣ, каждой системѣ (III_k) соотвѣтствуетъ система (H_k); далѣе, какъ мы уже упоминали, изъ каждой системы (H_k) можетъ быть выведена формула (1); если мы поэтому обозначимъ значеніе ϱ, отвѣчающее системѣ (III_k), черезъ ϱ_k, то

$$\prod_{\nu=0}^{3}\operatorname{tg}\frac{\sigma_\nu}{2}=\left(\prod_{\nu=0}^{3}\operatorname{tg}\frac{s_\nu}{2}\right)^{\varrho_1}$$
$$=\left(\prod_{\nu=0}^{3}\operatorname{tg}\frac{s_\nu}{2}\right)^{\varrho_2}$$
$$=\left(\prod_{\nu=0}^{3}\operatorname{tg}\frac{s_\nu}{2}\right)^{\varrho_3},$$

откуда непосредственно слѣдуетъ:

$$\varrho_1=\varrho_2=\varrho_3.$$

*) v. Braunmül, Geschichte der Trigonometrie, II, стр. 195 и сл.

D. Прикладная сферическая тригонометрія.

§ 51. Вспомогательныя предложенія, касающіяся точности тригонометрическихъ вычисленій. — „Формулы перехода“.

1. Если до сихъ поръ у насъ на первомъ планѣ стояли вопросы теоретическіе, то теперь мы обратимся къ вопросамъ практическимъ*). По даннымъ элементамъ треугольника мы будемъ вычислять остальные; для практики при этомъ, въ первую очередь, выступаютъ двѣ стороны дѣла:

a) удобство логариѳмическихъ вычисленій;

b) возможная точность вычисленія.

2. Чтобы удовлетворить требованію a), мы будемъ всегда стараться замѣнять въ нашихъ формулахъ суммы и разности произведеніями. Тамъ, гдѣ этого непосредственно сдѣлать нельзя, мы будемъ пользоваться вспомогательными углами.

3. На второмъ требованіи нужно остановиться нѣсколько подробнѣе. Такъ какъ мы вынуждены вести вычисленія съ опредѣленнымъ ограниченнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, то тригонометрическая функція будетъ всегда давать тѣмъ болѣе „точные“ результаты, чѣмъ быстрѣе ея „ходъ“, т. е. чѣмъ большее значеніе имѣетъ (положительное или отрицательное) нарашеніе функціи при томъ же маломъ наращеніи δ угла.

Чтобы судить о пригодности тригонометрическихъ функціи въ этомъ отношеніи, мы обратимся къ § 118 тома I. Приведенныя тамъ формулы въ первомъ приближеніи даютъ:

$$\left\{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2}, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right). \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Эти формулы тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше x. Изъ нихъ мы усматриваемъ, что для значеній x, близкихъ къ нулю, — для которыхъ, слѣдовательно, x^2 мало по сравненію съ x, — косинусъ сохраняетъ почти постоянное значеніе, близкое къ 1, и потому непригоденъ для вычисленій; напротивъ, синусъ почти пропорціоналенъ углу и, слѣдовательно, очень приго-

*) Лицамъ, желающимъ ближе познакомиться съ практикой тригонометріи, получить свѣдѣнія о цѣлесообразномъ расположеніи вычисленій, о преимуществѣ тѣхъ или иныхъ методовъ вычисленія и т. д. мы можемъ рекомендовать весьма содержательную книгу: Hammer, „Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie“. Stuttgart. 1897. — Изъ болѣе старыхъ сочиненій слѣдуетъ указать книгу Serret, „Traité de Trigonométrie“.

ленъ для вычисленія. Если примемъ во вниманіе, что $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, то вблизи значенія $\pi/2$, обратно, синусъ неудобенъ, а косинусъ удобенъ для вычисленія.

Пусть, далѣе, δ будетъ величина, настолько малая, что ея квадратомъ δ^2 можно пренебречь по сравненію съ δ *); мы можемъ тогда положить $\cos\delta = 1$ и $\sin\delta = \delta$. Если мы теперь дадимъ перемѣнному x наращеніе δ, то для соотвѣтственныхъ наращеній функцій $\sin x$ и $\cos x$, которыя мы обозначимъ черезъ $\Delta\sin x$ и $\Delta\cos x$, получаются значенія:

$$\Delta\sin x = \sin(x+\delta) - \sin x = \sin x\cos\delta + \cos x\sin\delta - \sin x = \delta\cos x,$$
$$\Delta\cos x = \cos(x+\delta) - \cos x = \cos x\cos\delta - \sin x\sin\delta - \cos x = -\delta\sin x.$$

Для хода функціи G мы получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} G(\sin x) &= \frac{\Delta\sin x}{\delta} = \cos x. \\ G(\cos x) &= \frac{\Delta\cos x}{\delta} = -\sin x. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ограничиваясь сначала первымъ квадрантомъ и имѣя въ виду, что насъ интересуетъ только абсолютная величина хода, мы находимъ:

$$|G(\sin x)| > |G(\cos x)|, \text{ коль скоро } \cos x > \sin x, \text{ т. е. отъ } x = 0 \text{ до } x = \frac{\pi}{4},$$

$$|G(\cos x)| > |G(\sin x)|, \text{ коль скоро } \sin x > \cos x \text{ т. е. отъ } x = \frac{\pi}{4} \text{ до } x = \frac{\pi}{2}.$$

Такъ какъ по абсолютной величинѣ тѣ же значенія повторяются во второмъ квадрантѣ, то мы можемъ, пользуясь *градусной* мѣрой угловъ, формулировать все это слѣдующимъ образомъ:

Синусъ даетъ болѣе точные результаты, нежели косинусъ, въ интервалахъ отъ 0^0 до 45^0 и отъ 135^0 до 180^0. Напротивъ, косинусъ даетъ болѣе точные результаты въ интервалѣ отъ 45^0 до 135^0.

Вблизи 0^0 и 180^0 косинусъ, а вблизи 90^0 синусъ даютъ практически непригодные результаты.

4. Что касается тангенсовъ и котангенсовъ, то нужно замѣтить прежде всего, что эти функціи, какъ взаимно обратныя величины, даютъ *одну и ту же точность*. Такъ какъ, далѣе, $\operatorname{tg}0 = 0$ и $\sin 0 = 0$, а, кромѣ того, согласно § 35, 1,

$$\sin a < \operatorname{tg}a, \quad \cos a < \operatorname{ctg}a,$$

*) При пятизначныхъ логариѳмахъ, напримѣръ, это имѣло бы мѣсто, если бы δ не превышало 20". Само собой разумѣется, что δ должно быть здѣсь выражено въ дуговой мѣрѣ, а не въ градусахъ.

то ходъ тангенса больше, нежели ходъ синуса, ходъ котангенса больше, нежели ходъ косинуса. Поэтому:

Тангенсомъ и котангенсомъ уголъ всегда опредѣляется точнѣе, нежели синусомъ и косинусомъ.

Изъ уравненій (2) § 118-го I тома:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \quad \lim_{\alpha=0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1 \tag{3}$$

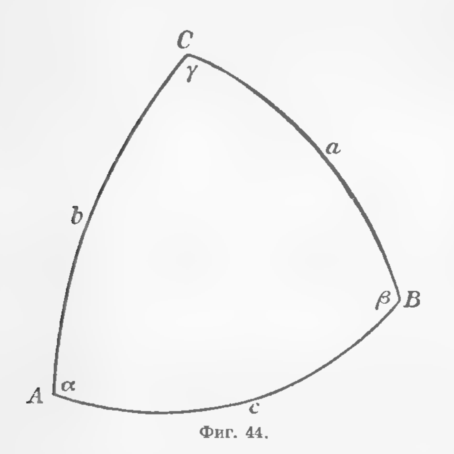
слѣдуетъ:

Весьма близко къ 0^0 и къ 180^0 уголъ приблизительно одинаково хорошо опредѣляется какъ синусомъ, такъ и тангенсомъ (или котангенсомъ); весьма же близко къ 90^0 уголъ одинаково хорошо опредѣляется косинусомъ или тангенсомъ (котангенсомъ).

Чтобы убѣдиться въ справедливости высказанныхъ здѣсь предложеній, достаточно заглянуть въ тригонометрическія таблицы.

Въ какой мѣрѣ отражаются на результатахъ ошибки наблюденій, это падаетъ за предѣлы нашихъ изслѣдованій.

5. Такъ какъ на практикѣ никогда не приходится имѣть дѣло съ треугольниками, стороны и углы которыхъ больше π, и такъ какъ старыя Эйлеровы обозначенія угловъ, по своей наглядности, удобнѣе (§ 38, 6), то мы установимъ теперь слѣдующее соглашеніе:



Фиг. 44.

Треугольники, которые мы впредь будемъ разсматривать, будутъ „обыкновенные", т. е. Эйлеровы треугольники въ Эйлеровомъ обозначеніи (фиг. 44).

Далѣе въ этомъ отдѣлѣ мы будемъ измѣрять стороны и углы не дуговой, а градусной мѣрой.

Такъ какъ углы и стороны треугольника теперь не превышаютъ 180^0, то они

однозначно опредѣляются косинусомъ, тангенсомъ, котангенсомъ, и двузначно синусомъ.

Однако, и синусомъ часто можно пользоваться, благодаря предложеніямъ объ Эйлеровомъ треугольникѣ, которыя мы привели въ § 36, 7; намъ придется здѣсь часто ими пользоваться.

6. Отмѣчая теперь въ отличіе отъ прежняго (Мёбіусова) обозначенія принятое сейчасъ „обыкновенное“ значками вверху, мы введемъ нижеслѣдующія сокращенія, которыхъ будемъ придерживаться во всемъ этомъ отдѣлѣ (углы выражены въ градусахъ):

$$\left.\begin{array}{ll} 2s_0' = a' + b' + c', & 2\sigma_0' = \alpha' + \beta' + \gamma', \\ 2s_1' = -a' + b' + c', & 2\sigma_1' = -\alpha' + \beta' + \gamma', \\ 2s_2' = a' - b' + c', & 2\sigma_2' = \alpha' - \beta' + \gamma', \\ 2s_3' = a' + b' - c', & 2\sigma_3' = \alpha' + \beta' - \gamma', \\ \multicolumn{2}{c}{\varepsilon = \alpha' + \beta' + \gamma' - 180^0.} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Это дастъ слѣдующія „формулы для перехода“ отъ Мёбіусовыхъ обозначеній къ „обыкновеннымъ“:

$$\left.\begin{array}{ll} a = a', & \alpha = 180^0 - \alpha', \\ b = b', & \beta = 180^0 - \beta', \\ c = c', & \gamma = 180^0 - \gamma', \\ 2s_0 = 360^0 - 2s_0', & 2\sigma_0 = 2\sigma_0' - 180^0 = \varepsilon, \\ 2s_1 = 2s_1', & 2\sigma_1 = 180^0 - 2\sigma_1' = 2\alpha' - \varepsilon, \\ 2s_2 = 2s_2', & 2\sigma_2 = 180^0 - 2\sigma_2' = 2\beta' - \varepsilon, \\ 2s_3 = 2s_3', & 2\sigma_3 = 180^0 - 2\sigma_3' = 2\gamma' - \varepsilon. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Когда переходъ къ „обыкновенной“ системѣ формулъ при помощи соотношеній (5) уже произведенъ, мы можемъ значки вверху снова опустить.

§ 52. Рѣшеніе прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

1. Пусть $\gamma = 90^0$ фиг. 45; тогда имѣютъ мѣсто сведенныя уже на стр. 76 и объединенныя Неперовымъ правиломъ формулы (9*) — (14*)

$$\cos c = \cos a \cos b. \quad (1)$$

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta. \quad (2)$$

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \qquad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \qquad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}. \quad (4)$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, \qquad \cos \beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}. \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}, \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}. \quad (6)$$

Фиг. 45.

2. Первый случай: Даны a, b; требуется опредѣлить α, β, c.

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}a \sin b, \qquad (6)$$
$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}b \sin a.$$

$$\cos c = \cos a \cos b. \qquad (1)$$

Если a, b или c имѣетъ значеніе, близкое къ 0^0, то формула (1) не годится; тогда пользуются формулой:

$$\operatorname{tg}c = \frac{\operatorname{tg}b}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}a}{\cos\beta}. \qquad (5)$$

Въ этомъ случаѣ всегда получается вещественное и однозначное рѣшеніе.

3. Второй случай: Даны a, c; требуется опредѣлить b, α, β.

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}. \qquad (1)$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}. \qquad (4)$$

$$\cos\beta = \frac{\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}c}. \qquad (5)$$

Рѣшеніе однозначно; въ самомъ дѣлѣ, когда найдена сторона b, то изъ двухъ значеній, отвѣчающихъ данному значенію $\sin\alpha$, нужно выбрать то, которое соотвѣтствуетъ теоремѣ, что противъ большаго угла лежитъ бо́льшая сторона (§ 36, 7).

Условіе вещественности рѣшенія: $\cos c < \cos a$.

4. Третій случай: Даны a, α; требуется опредѣлить b, c, β.

$$\sin b = \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{cotg}\alpha. \qquad (6)$$

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}. \qquad (4)$$

$$\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}. \qquad (3)$$

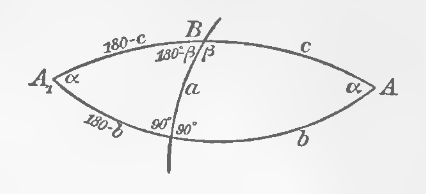
Условія вещественности рѣшенія:

1) $\sin a \leqq \sin\alpha$.
2) $\operatorname{tg}a$ и $\operatorname{tg}\alpha$ должны имѣть одновременно положительныя или отрицательныя значенія, такъ какъ иначе мы получили бы отрицательное значеніе для $\sin b$. Переводя это на геометрическій языкъ: a и α должны быть либо одновременно острыми, либо одновременно тупыми углами (въ предѣльномъ случаѣ они могутъ быть оба прямыми).

Рѣшеніе получится вообще двузначное, за исключеніемъ только того случая, когда $a = \alpha$; если $a < \alpha$, то мы получимъ два смежныхъ треугольника (фиг. 46).

Уравненія даютъ, собственно, по два значенія для всѣхъ трехъ искомыхъ величинъ b, c, β. Но если b и $180 - b$ суть два значенія первой изъ искомыхъ величинъ, то въ виду соотношеній (6) и (1) значенію b отвѣчаютъ вполнѣ опредѣленныя значенія β и c; значенію $180 - b$ тогда отвѣчаютъ $180 - \beta$ и $180 - c$.

Въ случаѣ $a = \alpha$ мы получаемъ одинъ двупрямоугольный треугольникъ.



Фиг. 46.

5. Четвертый случай: Даны a, β; требуется опредѣлить b, c, α.

$$\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} \beta. \qquad (6)$$

$$\operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} a \cos \beta. \qquad (5)$$

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta. \qquad (3)$$

Рѣшенія всегда вещественныя и однозначныя.

Если уголъ α близокъ къ 0^0, то для опредѣленіи c нужно воспользоваться формулой:

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}. \qquad (4)$$

6. Пятый случай: Даны c, α; требуется найти a, b, β.

$$\sin a = \sin c \sin \alpha. \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos \alpha. \qquad (5)$$

$$\operatorname{cotg} \beta = \cos c \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

Рѣшеніе однозначно; изъ двухъ значеній, которыя получаются для стороны a, нужно выбрать то, которое отвѣчаетъ предложенію § 36, 7. Если сторона a имѣетъ значеніе, близкое къ 90^0, то нужно вычислить сначала b и β, а затѣмъ опредѣлить сторону a по формулѣ

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos \beta, \qquad (5)$$

или же

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}. \qquad (1)$$

7. Шестой случай: Даны α, β; требуется найти a, b, c.

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \qquad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}. \qquad (3)$$

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta. \qquad (2)$$

Условіе вещественности:

$$1 \leqq \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \leqq +1.$$

Если это условіе удовлетворено, то рѣшеніе однозначно.

§ 53. „Обыкновенныя“ формулы косоугольнаго треугольника.

Въ настоящемъ параграфѣ формулы прежнихъ отдѣловъ, важныя для рѣшенія треугольниковъ, приводятся къ „обыкновенному“ виду при помощи формулъ перехода (5) на стр. 119. Легко усмотрѣть, что всѣ появляющіеся здѣсь радикалы нужно взять съ положительнымъ знакомъ; для этого приходится только иногда пользоваться предложеніями, касающимися суммы угловъ треугольника и изложенными въ § 36, 7. Во всѣхъ формулахъ второго порядка нужно, конечно, положить $\varrho = +1$.

Теорема синусовъ (§ 42, II и (5)):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{D}{\Delta}, \\
&D = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta = \sin a \sin b \sin \gamma \\
&\qquad = \underset{+}{\sqrt{4 \sin s_0 \sin s_1 \sin s_2 \sin s_3}}, \\
&\Delta = \sin \beta \sin \gamma \sin a = \sin \gamma \sin \alpha \sin b = \sin \alpha \sin \beta \sin c \\
&\qquad = \underset{+}{\sqrt{4 \sin \sigma_0 \sin \sigma_1 \sin \sigma_2 \sin \sigma_3}}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Теоремы косинусовъ (§ 41, I и I′):

$$\left.\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \\
\cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta, \\
\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a, \\
\cos \beta &= -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b, \\
\cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

Затѣмъ слѣдуютъ формулы (1), (1′), (2), (2′) § 43-го:

$$\left.\begin{aligned}
\sin a \cos \beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha, \\
\sin a \cos \gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha; \\
\sin b \cos \gamma &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta, \\
\sin b \cos \alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta; \\
\sin c \cos \alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma, \\
\sin c \cos \beta &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \gamma.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin \alpha \cos b &= \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a, \\
\sin \alpha \cos c &= \cos \gamma \sin \beta + \sin \gamma \cos \beta \cos a; \\
\sin \beta \cos c &= \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha \cos b, \\
\sin \beta \cos a &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \cos b; \\
\sin \gamma \cos a &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \cos c, \\
\sin \gamma \cos b &= \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha \cos c.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(V)}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin\alpha \operatorname{cotg}\beta &= \operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos\alpha, \\
\sin\alpha \operatorname{cotg}\gamma &= \operatorname{cotg} c \sin b - \cos b \cos\alpha; \\
\sin\beta \operatorname{cotg}\gamma &= \operatorname{cotg} c \sin a - \cos a \cos\beta, \\
\sin\beta \operatorname{cotg}\alpha &= \operatorname{cotg} a \sin c - \cos c \cos\beta; \\
\sin\gamma \operatorname{cotg}\alpha &= \operatorname{cotg} a \sin b - \cos b \cos\gamma, \\
\sin\gamma \operatorname{cotg}\beta &= \operatorname{cotg} b \sin a - \cos a \cos\gamma.
\end{aligned}
\right\}
\qquad \text{(VI)}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin a \operatorname{cotg} b &= \operatorname{cotg}\beta \sin\gamma + \cos\gamma \cos a, \\
\sin a \operatorname{cotg} c &= \operatorname{cotg}\gamma \sin\beta + \cos\beta \cos a; \\
\sin b \operatorname{cotg} c &= \operatorname{cotg}\gamma \sin\alpha + \cos\alpha \cos b, \\
\sin b \operatorname{cotg} a &= \operatorname{cotg}\alpha \sin\gamma + \cos\gamma \cos b; \\
\sin c \operatorname{cotg} a &= \operatorname{cotg}\alpha \sin\beta + \cos\beta \cos c, \\
\sin c \operatorname{cotg} b &= \operatorname{cotg}\beta \sin\alpha + \cos\alpha \cos c.
\end{aligned}
\right\}
\qquad \text{(VII)}
$$

Неперовы аналогіи (стр. 73 (6)):

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}, &&
\frac{\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}, \\
&\frac{\operatorname{tg}\frac{c+a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b}{2}} = \frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}, &&
\frac{\operatorname{tg}\frac{c-a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}, \\
&\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}, &&
\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}, \\
&\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}, &&
\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}, \\
&\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{c-a}{2}}{\cos\frac{c+a}{2}}, &&
\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{c-a}{2}}{\sin\frac{c+a}{2}}, \\
&\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}, &&
\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}
\end{aligned}
\right\}
\qquad \text{(VIII)}
$$

Формулы Деламбра (стр. III):

$$\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\qquad \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{c+a}{2}}{\sin\frac{b}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},\qquad \frac{\sin\frac{c-a}{2}}{\sin\frac{b}{2}}=\frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},\qquad \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\qquad \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \tag{IX}$$

$$\frac{\cos\frac{c+a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},\qquad \frac{\cos\frac{c-a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}=\frac{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},\qquad \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Если положимъ для сокращенія:

$$\underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_1 \sin s_2 \sin s_3}{\sin s_0}}}=k,\qquad \underset{+}{\sqrt{\frac{\cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos\sigma_3}{-\cos\sigma_0}}}=\varkappa,$$

то формулы (1), (1′) и (2) § 45-го даютъ:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_2\sin s_3}{\sin b\sin c}}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_0\sin s_1}{\sin b\sin c}}};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{k}{\sin s_1};$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_3\sin s_1}{\sin c\sin a}}};\quad \cos\frac{\beta}{2}=\underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_0\sin s_2}{\sin c\sin a}}};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{k}{\sin s_2}; \tag{X}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_1\sin s_2}{\sin a\sin b}}};\quad \cos\frac{\gamma}{2}=\underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_0\sin s_3}{\sin a\sin b}}};\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{k}{\sin s_3}.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\frac{a}{2}=\sqrt[+]{\frac{-\cos\sigma_0\cos\sigma_1}{\sin\beta\sin\gamma}}\,; \quad \cos\frac{a}{2}=\sqrt[+]{\frac{\cos\sigma_2\cos\sigma_3}{\sin\beta\sin\gamma}}\,; \quad \operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\cos\sigma_1}{\varkappa}\,;\\
&\sin\frac{b}{2}=\sqrt[+]{\frac{-\cos\sigma_0\cos\sigma_2}{\sin\gamma\sin\alpha}}\,; \quad \cos\frac{b}{2}=\sqrt[+]{\frac{\cos\sigma_3\cos\sigma_1}{\sin\gamma\sin\alpha}}\,; \quad \operatorname{tg}\frac{b}{2}=\frac{\cos\sigma_2}{\varkappa}\,;\\
&\sin\frac{c}{2}=\sqrt[+]{\frac{-\cos\sigma_0\cos\sigma_3}{\sin\alpha\sin\beta}}\,; \quad \cos\frac{c}{2}=\sqrt[+]{\frac{\cos\sigma_1\cos\sigma_2}{\sin\alpha\sin\beta}}\,; \quad \operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\cos\sigma_3}{\varkappa}\,.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(XI)}$$

Формула Люилье получается изъ соотношеній (IV) § 50-го, если положимъ $\varrho=+1$, $i=0$ и воспользуемся вторымъ произведеніемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt[+]{\operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}}\,. \qquad \text{(XII)}$$

Формулы Серре (§ 50, (IV) при $\varrho=+1$, $i=1, 2, 3$):

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\sqrt[+]{\frac{\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}}}\,,\\
&\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\sqrt[+]{\frac{\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}}}\,,\\
&\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\sqrt[+]{\frac{\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}}}\,.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(XIII)}$$

Если въ соотношеніяхъ (IV) § 50-го возьмемъ первое произведеніе, то вмѣсто уравненій (XII) и (XIII) получимъ другія формулы, также принадлежащія Серре:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\frac{s_0}{2}=\sqrt[+]{\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}}\,,\\
&\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}=\sqrt[+]{\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}}\,,
\end{aligned}\right\}\quad\text{(XIV)}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{s_2}{2} &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}}, \\ \operatorname{tg}\frac{s_3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIV)}$$

Эти соотношенія замѣняютъ собой формулы, полярныя относительно формулъ (XII) и (XIII). Чтобы получить послѣднія, слѣдовало бы ввести величину, полярную относительно ε,

$$e = 360^0 - (a + b + c).$$

Формула (XII) тогда дала бы

$$\operatorname{tg}\frac{e}{2} = \pm\sqrt{\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\sigma_0}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\sigma_1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\sigma_2}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\sigma_3}{2}\right)}.$$

Эти формулы трудно рекомендовать въ виду того, что онѣ очень мало изящны.

Обыкновенно ε называютъ „сферическимъ избыткомъ“, а e — „сферическимъ недостаткомъ“ сферическаго треугольника.

§ 54. Рѣшеніе косоугольнаго треугольника.

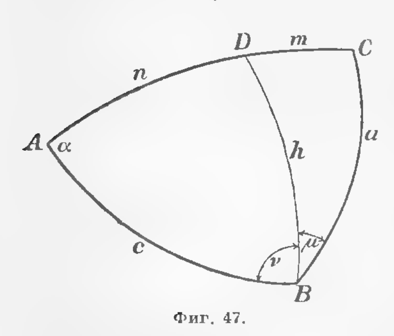
Здѣсь приходится различать 6 случаевъ, которые разбиваются, однако на 3 взаимно полярныя пары; каждую такую пару мы будемъ разсматривать совмѣстно.

Первый и второй случай:

Даны a, b, γ; требуется опредѣлить α, β, c.

Даны α, β, c; требуется опредѣлить a, b, γ.

1. Методъ, наиболѣе напрашивающійся съ математической точки зрѣнія, заключается въ слѣдующемъ: разлагая треугольникъ на два прямоугольныхъ треугольника, мы получаемъ возможность примѣнить извѣстныя уже намъ формулы прямоугольнаго треугольника; результаты, къ которымъ приводитъ этотъ методъ, съ точки зрѣнія вычисленій, вполнѣ удовлетворительны.



Фиг. 47.

Для этой цѣли мы проводимъ высоту $BD = h$ (см. схематическій чертежъ 47); изъ двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ, которые мы

такимъ образомъ получаемъ, мы при помощи формулъ (1), (5), (3), (2) § 52-го находимъ:

$$\cos c = \cos b \cos(b - m). \quad (1)$$

Для опредѣленія m и b служатъ формулы:

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} a \cos\gamma, \quad (2)$$

$$\cos b = \frac{\cos a}{\cos m}. \quad (3)$$

Подставляя выраженіе (3) въ формулу (1), мы получимъ для вычисленія стороны c правило:

Нужно вычислить m при помощи уравненія:

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} a \cos\gamma,$$

а затѣмъ c изъ уравненія

$$\cos c = \frac{\cos a \cos(b - m)}{\cos m}. \quad (4)$$

Вычисленіе угловъ α и $\beta = -\mu + \nu$ изъ тѣхъ же прямоугольныхъ треугольниковъ, когда извѣстно c, уже не представляетъ никакихъ затрудненій.

$$\cos\gamma = \cos b \sin(\beta - \nu). \quad (1)$$

Для опредѣленія ν и b служатъ формулы:

$$\operatorname{cotg} \nu = \operatorname{tg} a \cos c, \quad (2)$$

$$\cos b = \frac{\cos a}{\sin \nu}. \quad (3)$$

Подставляя выраженіе (3) въ формулу (1), мы получимъ для вычисленія угла γ правило:

Нужно вычислить ν при помощи уравненія:

$$\operatorname{cotg} \nu = \operatorname{tg} a \cos c,$$

а затѣмъ γ изъ уравненія

$$\cos\gamma = \frac{\cos a \sin(\beta - \nu)}{\sin \nu}. \quad (4)$$

Вычисленіе сторонъ a и $b = = m + n$ изъ тѣхъ же прямоугольныхъ треугольниковъ, когда извѣстно γ, уже не представляетъ никакихъ затрудненій

2. Изъ формулъ (4) можно получить интересный результатъ. Примѣняя теорему сложенія и затѣмъ формулы (2), мы получимъ:

$$\cos c = \cos a \cos b + \cos a \sin b \operatorname{tg} m$$
$$= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma.$$

$$\cos\gamma = \cos a \sin\beta \operatorname{ctg}\nu - \cos\alpha \cos\beta$$
$$= -\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos c.$$

Но эти формулы представляютъ собой не что иное, какъ двѣ теоремы косинусовъ на сферѣ. Если, какъ это обыкновенно дѣлается въ элементарныхъ учебникахъ, мы будемъ предполагать формулы прямоугольнаго треугольника извѣстными раньше, то мы можемъ сказать:

Первая пара задачъ на косоугольный треугольникъ, если исходить отъ треугольника прямоугольнаго, сама собой и притомъ съ необходимостью приводитъ къ теоремамъ косинусовъ на сферѣ.

Само собой разумѣется, что это доказательство примѣнимо только къ Эйлеровымъ треугольникамъ

3. Съ нашей точки зрѣнія теорема косинусовъ

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma \quad (5) \qquad \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin c \quad (5)$$

является первоначальнымъ рѣшеніемъ нашей задачи; мы спросимъ теперь, наоборотъ: какъ привести ее къ виду (4), который оказывается предпочтительнѣе вслѣдствіе того, что онъ болѣе пригоденъ для логариѳмическихъ вычисленій?

Для этого нужно ввести вспомогательный уголъ (ср. § 51, 2). Обозначая черезъ p, m, ν вспомогательныя величины, мы въ соотношенія (5) подставляемъ:

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= p\cos m,\\ \sin a\cos\gamma &= p\sin m.\end{aligned}\right\} \quad (6) \qquad \left.\begin{aligned}\cos\alpha &= p\sin\nu,\\ \sin\alpha\cos c &= p\cos\nu.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Если тогда $m \leqq 180^0$, то величины p и m опредѣляются однозначно изъ уравненій:

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} a\cos\gamma, \quad (7)$$

$$p = \frac{\cos a}{\cos m} = \frac{\sin a\cos\gamma}{\sin m}. \quad (8)$$

Вводя же выраженія (7) и (8) въ уравненіе (5), мы приведемъ его къ виду:

$$\cos c = p\cos(b - m) = \frac{\cos a\cos(b-m)}{\cos m}, \quad (9)$$

при этомъ m нужно опредѣлить изъ уравненія (7).

Если тогда $\nu \leqq 180^0$, то величины p и ν опредѣляются однозначно изъ уравненій:

$$\operatorname{cotg}\nu = \operatorname{tg}\alpha\cos c, \quad (7)$$

$$p = \frac{\cos\alpha}{\sin\nu} = \frac{\sin\alpha\cos c}{\cos\nu}. \quad (8)$$

Вводя же выраженія (7) и (8) въ уравненіе (5), мы приведемъ его къ виду:

$$\cos\gamma = p\sin(\beta - \nu) = \frac{\cos\alpha\sin(\beta-\nu)}{\sin\nu}, \quad (9)$$

при этомъ ν нужно опредѣлить изъ уравненія (7).

Съ точки зрѣнія геометрической, p такимъ образомъ тождественно съ прежнимъ $\cos b$.

4. Чтобы опредѣлить углы α, β, когда сторона c уже вычислена, можно воспользоваться теоремой синусовъ

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}\sin\gamma$$

и соотвѣтственнымъ уравненіемъ для угла β.

Если же мы не предполагаемъ уже опредѣленной сторону c,

4. Чтобы опредѣлить стороны a и b, когда уголъ γ уже вычисленъ, можно воспользоваться теоремой синусовъ

$$\sin a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\sin c$$

и соотвѣтственнымъ уравненіемъ для стороны b.

Если же мы не предполагаемъ уже опредѣленнымъ уголъ γ,

то нужно скомбинировать теорему синусовъ съ соотношеніями (IV):

$$\left.\begin{aligned} \sin c \sin \alpha &= \sin a \sin \gamma, \\ \sin c \cos \alpha &= \cos a \sin b \\ &\quad + \sin a \cos b \cos \gamma, \end{aligned}\right\} \quad (9a)$$

откуда посредствомъ дѣленія получимъ формулу для $\operatorname{tg}\alpha$.

Послѣднюю можно привести къ логариѳмическому виду, вводя тѣ же величины m и p. Изъ уравненій (6) и (9) мы получимъ:

$$\sin c \sin \alpha = \sin a \sin \gamma,$$
$$\sin c \cos \alpha = p \sin(b - m),$$

такъ что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin a \sin \gamma}{p \sin(b - m)}.$$

Примѣняя второе выраженіе для p изъ уравненія (8), найдемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin m \operatorname{tg}\gamma}{\sin(b - m)};$$

величину m нужно предварительно вычислить изъ уравненія (7).

Соотвѣтственный результатъ получаемъ также для угла β.

5. Другой способъ опредѣленія угловъ, также удобный для логариѳмическихъ вычисленій, даютъ аналогіи Непера (VIII):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\cos\frac{a - b}{2}}{\cos\frac{a + b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin\frac{a - b}{2}}{\sin\frac{a + b}{2}}.$$

Если мы хотимъ вычислить сторону c лишь послѣ угловъ, то это можно удобно произвести

то нужно скомбинировать теорему синусовъ съ соотношеніями (V):

$$\left.\begin{aligned} \sin \gamma \sin a &= \sin \alpha \sin c, \\ \sin \gamma \cos a &= \cos \alpha \sin \beta \\ &\quad + \sin \alpha \cos \beta \cos c, \end{aligned}\right\} \quad (9a)$$

откуда посредствомъ дѣленія получимъ формулу для $\operatorname{tg} a$.

Послѣднюю можно привести къ логариѳмическому виду, вводя тѣ же величины ν и p. Изъ уравненій (6) и (9) мы получимъ:

$$\sin \gamma \sin a = \sin \alpha \sin c,$$
$$\sin \gamma \cos a = p \cos(\beta - \nu),$$

такъ что

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin \alpha \sin c}{p \cos(\beta - \nu)}.$$

Примѣняя второе выраженіе для p изъ уравненія (8) найдемъ:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos \nu \operatorname{tg} c}{\cos(\beta - \nu)};$$

величину ν нужно предварительно вычислить изъ уравненія (7).

Соотвѣтственный результатъ получаемъ также для стороны b.

5. Другой способъ опредѣленія сторонъ, также удобный для логариѳмическихъ вычисленій, даютъ аналогіи Непера (VIII):

$$\operatorname{tg}\frac{a + b}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a - b}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin\frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Если мы хотимъ вычислить уголъ γ лишь послѣ сторонъ, то это можно удобно произвести

при помощи уравненій Деламбра, напримѣръ:

$$\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

или

$$\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

при помощи уравненій Деламбра, напримѣръ:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}$$

или

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ выбрать то, которое даетъ наиболѣе точный результатъ (§ 51).

Третій и четвертый случай.

Даны стороны a, b, c; требуется разыскать углы α, β, γ.

6. Первое рѣшеніе.

По формуламъ (II):

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

и т. д.

Даны углы α, β, γ; требуется разыскать стороны a, b, c.

6. Первое рѣшеніе.

По формуламъ (II):

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

и т. д.

Такъ какъ это рѣшеніе неудобно для логариѳмическихъ вычисленій, то предпочитаютъ слѣдующія рѣшенія.

7. Второе рѣшеніе.

Мы ведемъ вычисленіе по формуламъ (X) и (XI). Изъ нихъ, вслѣдствіе большей точности, наиболѣе рекомендуются формулы, выражающія тангенсы. Именно:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin s_1}$$

и т. д.

$$k = \sqrt[+]{\frac{\sin s_1\sin s_2\sin s_3}{\sin s_0}}.$$

8. Третье рѣшеніе.

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\cos\sigma_1}{\varkappa}$$

и т. д.

$$\varkappa = \sqrt[+]{\frac{\cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos\sigma_3}{\cos\sigma_0}}.$$

8. Третье рѣшеніе.

Если положимъ (формула (1) § 50-го)

$$M = \sqrt[+]{\frac{\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s_0}{2}}} = \sqrt[+]{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)},$$

то уравненія (XII), (XIII) и (XIV) даютъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = M\cdot\operatorname{tg}\frac{s_0}{2},\qquad\qquad \operatorname{tg}\frac{s_0}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}}{M}.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = M\cdot\operatorname{cotg}\frac{s_1}{2},\qquad\qquad \operatorname{tg}\frac{s_1}{2} = M\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = M\cdot\operatorname{cotg}\frac{s_2}{2},\qquad\qquad \operatorname{tg}\frac{s_2}{2} = M\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = M\cdot\operatorname{cotg}\frac{s_3}{2}.\qquad\qquad \operatorname{tg}\frac{s_3}{2} = M\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Отсюда нетрудно уже получить углы α, β, γ или соотвѣтственно стороны a, b, c простымъ сложеніемъ.

Этотъ методъ особенно цѣненъ въ томъ отношеніи, что онъ даетъ возможность строго провѣрять результаты:

$$\frac{\varepsilon}{4}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)+\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)+\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = 90^0.\qquad\qquad \frac{s_0}{2}+\frac{s_1}{2}+\frac{s_2}{2}+\frac{s_3}{2} = 0.$$

Пятый и шестой случай.

Даны c, a, γ; требуется найти α, β, b.

9. Первое рѣшеніе.

По теоремѣ синусовь:

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}\sin\gamma. \tag{10}$$

Когда вычисленъ уголъ α, формулы (VIII) даютъ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} &= \frac{\sin\frac{c+a}{2}}{\sin\frac{c-a}{2}}\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2},\\ \operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \frac{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}\operatorname{tg}\frac{c-a}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Даны γ, α, c; требуется найти a, b, β.

9. Первое рѣшеніе.

По теоремѣ синусовъ:

$$\sin a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\sin c. \tag{10}$$

Когда вычислена сторона a, формулы (VIII) даютъ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \frac{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}\operatorname{tg}\frac{c-a}{2},\\ \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} &= \frac{\sin\frac{c+a}{2}}{\sin\frac{c-a}{2}}\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

10. Второе рѣшеніе.

Если нужно вычислить только сторону b или вычислить ее раньше угловъ, то теорема косинусовъ:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$$

даетъ квадратное уравненіе относительно $\sin b$, если подставимъ

$$\cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b}.$$

Значительно проще ведется вычисленіе, если мы опять вводимъ вспомогательныя величины. Именно, если опять положимъ, какъ въ уравненіи (7),

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} a \cos\gamma, \quad 0^0 < m < 180^0,$$

то соотношеніе (9) даетъ непосредственно:

$$\cos(b - m) = \frac{\cos c \cos m}{\cos a}. \qquad (12)$$

Если нужно вычислить уголъ β одинъ или въ первую очередь, то теорема синусовъ и второе уравненіе (V) даютъ:

$$\sin\alpha \sin c = \sin\gamma \sin a$$
$$\sin\alpha \cos c = \cos\gamma \sin\beta,$$
$$+ \sin\gamma \cos\beta \cos a.$$

Дѣля одно на другое и подставляя $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}$, мы получаемъ квадратное уравненіе относительно $\sin\beta$.

10. Второе рѣшеніе.

Если нужно вычислить только уголъ β или вычислить его раньше сторонъ, то теорема косинусовъ:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos c$$

даетъ квадратное уравненіе относительно $\sin\beta$, если подставимъ

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}.$$

Значительно проще ведется вычисленіе, если мы опять вводимъ вспомогательныя величины. Именно, если опять положимъ, какъ въ уравненіи (7),

$$\operatorname{cotg} \nu = \operatorname{tg}\alpha \cos c, \quad 0^0 < \nu < 180^0,$$

то соотношеніе (9) даетъ непосредственно:

$$\sin(\beta - \nu) = \frac{\cos\gamma \sin\nu}{\cos\alpha}. \qquad (12)$$

Если нужно вычислить сторону b одну или въ первую очередь, то теорема синусовъ и второе уравненіе (IV) даютъ:

$$\sin a \sin\gamma = \sin c \sin\alpha,$$
$$\sin a \cos\gamma = \cos c \sin b$$
$$- \sin c \cos b \cos\alpha.$$

Дѣля одно на другое и подставляя $\cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b}$, мы получаемъ квадратное уравненіе относительно $\sin b$.

Чтобы и здѣсь ввести вспомогательный уголъ для удобства вычисленій, мы вновь возвратимся къ фиг. 47 на стр. 126 и положимъ (подъ p разумѣя $\cos b$):

$$\left.\begin{aligned} \cos\gamma &= p \sin\mu, \\ \sin\gamma \cos a &= p \cos\mu. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= p \cos n, \\ \sin c \cos\alpha &= p \sin n. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Тогда p и μ опредѣляются изъ уравненій:

Тогда p и n опредѣляются изъ уравненій:

$$\operatorname{cotg}\mu = \cos a \operatorname{tg}\gamma, \qquad (14)$$

$$p = \frac{\sin\gamma\cos a}{\cos\mu}. \qquad (15)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ:

$$\sin\alpha\sin c = \sin\gamma\sin a,$$
$$\sin\alpha\cos c = p\cos(\beta - \mu);$$

раздѣляя же первое изъ этихъ уравненій на второе и пользуясь соотношеніемъ (15), находимъ:

$$\operatorname{tg}c = \frac{\cos\mu \operatorname{tg}a}{\cos(\beta - \mu)},$$

или, наконецъ,

$$\cos(\beta - \mu) = \operatorname{tg}a \operatorname{cotg}c \cos\mu, \quad (16)$$

при чемъ значеніе μ нужно взять изъ уравненія (14).

$$\operatorname{tg}n = \cos\alpha \operatorname{tg}c, \qquad (14)$$

$$p = \frac{\sin c\cos\alpha}{\sin n}. \qquad (15)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ:

$$\sin a\sin\gamma = \sin c\sin\alpha,$$
$$\sin a\cos\gamma = p\sin(b - n);$$

раздѣляя же первое изъ этихъ уравненій на второе и пользуясь соотношеніемъ (15), находимъ:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin n \operatorname{tg}\alpha}{\sin(b - n)},$$

или, наконецъ,

$$\sin(b - n) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\gamma \sin n, \quad (16)$$

при чемъ значеніе n нужно взять изъ уравненія (14).

11. Изслѣдованіе рѣшеній. Нѣсколько сложное въ настоящемъ случаѣ изслѣдованіе мы проведемъ только для пятаго случая, такъ какъ результатъ непосредственно распространяется на шестой случай.

Уравненіе (10) приводится къ тремъ главнымъ случаямъ.

1. $\dfrac{\sin a\sin\gamma}{\sin c} > 1.$ Вещественныхъ рѣшеній вовсе нѣтъ.

2. $\dfrac{\sin a\sin\gamma}{\sin c} = 1.$ Одно вещественное рѣшеніе; треугольникъ становится прямоугольнымъ съ прямымъ угломъ α.

3. $\dfrac{\sin a\sin\gamma}{\sin c} < 1.$ Въ этомъ случаѣ уравненіе (10) даетъ два значенія для угла α, но нужно обсудить, пригодны ли оба угла.

Чтобы провести это изслѣдованіе, мы обозначимъ острый уголь, который получается изъ уравненія (10), черезъ α', а тупой — черезъ α'', такъ что

$$\alpha'' = 180^0 - \alpha'.$$

Наша задача будетъ имѣть одно или два рѣшенія въ зависимости отъ того, даетъ ли только одинъ изъ угловъ α' и α'' или даютъ оба положительныя значенія для $\operatorname{cotg}\beta/2$ и $\operatorname{cotg} b/2$, когда мы эти углы подставимъ въ уравненіе (11). Но это означаетъ:

для каждаго вещественнаго рѣшенія разности $\gamma - \alpha$ и $c - a$ должны имѣть одинаковые знаки.

Различные случаи, которые здѣсь могутъ представиться, мы свели въ табличку, помѣщенную ниже. Чтобы выяснить, какъ она составлена, мы остановимся подробнѣе на первомъ изъ приведенныхъ въ ней случаевъ. Итакъ, положимъ, что

$$c < 90^0, \quad a < 90^0, \quad c < a.$$

Такъ какъ $c - a < 0$, то и $\gamma - \alpha$ должно быть меньше 0. Но при нашихъ предположеніяхъ $\sin c < \sin a$; поэтому, въ виду соотношенія (10) $\sin\alpha > \sin\gamma$. Но, какъ мы показали, γ должно быть меньше α; если поэтому $\gamma > 90^0$, то мы не получаемъ ни одного рѣшенія, если же $\gamma < 90^0$, то мы получаемъ 2 рѣшенія. Если мы положимъ:

$$c = 90^0 \mp \varphi^0, \qquad a = 90^0 \mp \psi^0,$$

то

$\varphi < \psi$ означаетъ: сторона c ближе къ 90^0, нежели a;

$\varphi > \psi$ означаетъ: сторона a ближе къ 90^0, нежели c.

Послѣ этихъ подготовительныхъ соображеній пониманіе слѣдующей таблицы уже не представитъ никакихъ затрудненій:

$c < 90^0, \quad a < 90^0,$

$c < a$	два рѣшенія ни одного рѣшенія	смотря по тому, будетъ ли	$\gamma < 90^0$ $\gamma > 90^0$
$c = a$	см. ниже		
$c > a$	одно рѣшеніе: $\alpha = \alpha'$.		

$c > 90^0, \quad a < 90^0,$

$\varphi > \psi$	два рѣшенія ни одного рѣшенія	смотря по тому, будетъ ли	$\gamma > 90^0$ $\gamma < 90^0$
$\varphi = \psi$	одно рѣшеніе: $\alpha = \alpha'$ ни одного рѣшенія	смотря по тому, будетъ ли	$\gamma > 90^0$ $\gamma < 90^0$
$\varphi < \psi$	одно рѣшеніе: $\alpha = \alpha'$.		

$c < 90^0, \quad a > 90^0,$

$\varphi > \psi$	два рѣшенія ни одного рѣшенія	смотря по тому, будетъ ли	$\gamma < 90^0$ $\gamma > 90^0$
$\varphi = \psi$	одно рѣшеніе: $\alpha = \alpha''$ ни одного рѣшенія	смотря по тому, будетъ ли	$\gamma < 90^0$ $\gamma > 90^0$
$\varphi < \psi$	одно рѣшеніе: $\alpha = \alpha''$.		

$c > 90^0, \quad a > 90^0,$

$c > a$	два рѣшенія ни одного рѣшенія	смотря по тому, будетъ ли	$\gamma > 90^0$ $\gamma < 90^0$
$c = a$	см. ниже		
$c < a$	одно рѣшеніе: $a = a''$.		

Особаго изслѣдованія требуетъ еще случай $c = a$. Въ этомъ случаѣ и $\alpha = \gamma$ (§ 36, 7), и формула (VIII) даетъ:

$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}\gamma\cos c; \quad \operatorname{tg}\frac{b}{2} = \operatorname{tg}c\cos\gamma.$$

Чтобы поэтому $\operatorname{tg}\beta/2$ и $\operatorname{tg}b/2$ имѣли положительныя значенія, необходимо и достаточно, чтобы c и γ были одновременно больше 90^0.

Здѣсь мы получаемъ только одно рѣшеніе за исключеніемъ того случая, когда $a = c = \gamma = 90^0$. Въ этомъ случаѣ, какъ легко усмотрѣть, мы получаемъ безчисленное множество рѣшеній.

12. Изслѣдованіе шестой задачи (γ, a, c) проводится совершенно такимъ же образомъ, только стороны и углы нужно всюду замѣнить другъ другомъ. Если положимъ:

$c = 90^0 \mp \varphi^0,$	$\gamma = 90^0 \mp \varphi^0,$
$a = 90^0 \mp \psi^0,$	$\alpha = 90^0 \mp \psi^0,$

$$\delta_{xy} = \begin{cases} +1, & \text{когда } x \text{ и } y \text{ однородные*) углы,} \\ 0, & \text{когда } x \text{ и } y \text{ неоднородные углы,} \end{cases}$$

$\mathfrak{z}$ = число рѣшеній,

то наша таблица приводитъ окончательно къ слѣдующему результату:

(1)	$\frac{\sin a \sin\gamma}{\sin c} > 1: \quad \mathfrak{z} = 0$	(1)	$\frac{\sin\alpha \sin c}{\sin\gamma} > 1: \quad \mathfrak{z} = 0$
(2)	$\frac{\sin a \sin\gamma}{\sin c} = 1: \quad \mathfrak{z} = 1$	(2)	$\frac{\sin\alpha \sin c}{\sin\gamma} = 1: \quad \mathfrak{z} = 1$
(3)	$\frac{\sin a \sin\gamma}{\sin c} < 1:$	(3)	$\frac{\sin\alpha \sin c}{\sin\gamma} < 1:$

a) $\varphi < \psi: \quad \mathfrak{z} = 1$

b) $\varphi = \psi: \quad \mathfrak{z} = \delta_{c\gamma}, \quad \delta_{a\alpha} = 1$

c) $\varphi > \psi: \quad \mathfrak{z} = 2\delta_{c\gamma}$

Исключеніе:	Исключеніе:
$a = c = \gamma = 90^0: \quad \mathfrak{z} = \infty.$	$\alpha = \gamma = c = 90^0: \quad \mathfrak{z} = \infty.$

*) Подъ „однородными“ мы разумѣемъ два угла, если они оба острые или оба тупые, подъ „неоднородными“—такіе, изъ которыхъ одинъ острый, другой тупой.

13. Въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣются два рѣшенія, мы получаемъ два значенія стороны b и угла β, полагая въ уравненіяхъ (11) разъ $a = a'$ (или соотвѣтственно $a = a'$), а другой разъ $a = a''$ (соотвѣтственно $a = a''$).

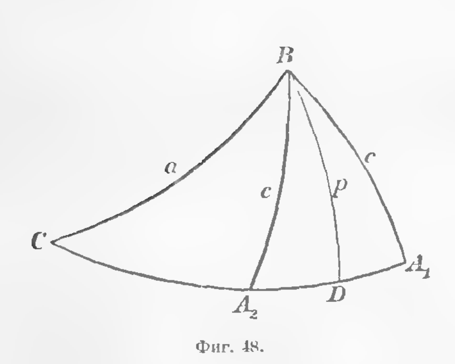
Нѣсколько иначе обстоитъ дѣло, если мы пользуемся вспомогательнымъ угломъ (стр. 133).

Въ этомъ случаѣ разность $b - m$ опредѣляется по косинусу. Если n есть одно изъ значеній, отвѣчающихъ этому косинусу, то другое есть $-n$; вмѣстѣ съ тѣмъ

$$b' = m + n,$$

$$b'' = m - n.$$

Точно такъ же и разность $\beta - \mu$ опредѣляется по косинусу. Если



Фиг. 48.

поэтому $\beta - \mu = \pm\nu$, то

$$\beta' = \mu + \nu,$$

$$\beta'' = \mu - \nu.$$

Это подтверждается (схематическимъ) чертежомъ 48, на которомъ

$$DA_1 = DA_2 = n,$$

$$\angle A_1BD = \angle A_2BD = \nu,$$

$$CD = m,$$

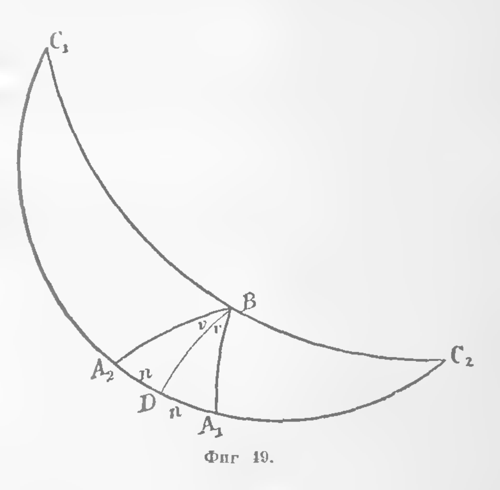
$$\angle CBD = \mu.$$

Въ этомъ случаѣ разность $\beta - \nu$ опредѣляется по синусу. Если μ есть одно изъ значеній, отвѣчающихъ этому синусу, то другое есть $180^0 - \mu$; вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\beta' = \nu + \mu,$$

$$\beta'' = \nu + 180^0 - \mu.$$

Точно такъ же разность $b - n$ опредѣляется по синусу. Если



Фиг. 49.

поэтому $b - n = \mp m$, то

$$b' = n + m,$$

$$b'' = n + 180^0 - m.$$

Это подтверждается чертежомъ 49, на которомъ

$$\angle C_1BD = \mu, \quad \angle C_2BD = 180^0 - \mu,$$

$$\angle DC_1 = m, \quad DC_2 = 180^0 - m,$$

$$\angle A_1BD = \angle A_2BD = \nu,$$

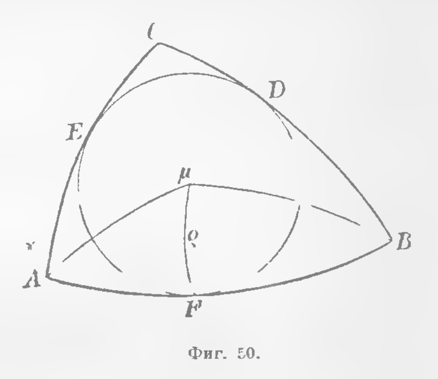
$$\angle DA_1 = DA_2 = n.$$

§ 55. Опредѣленіе другихъ важныхъ частей треугольника.

1. Радіусъ ϱ вписанной окружности.

Пусть ϱ будетъ сферическій радіусъ вписанной окружности, μ ея центръ, D, E, F точки касанія (фиг. 50, схематическій чертежъ) Совершенно такъ же, какъ и въ планиметріи, мы убѣждаемся, что

$$AE = AF = s_1,$$
$$BF = BD = s_2,$$
$$CD = CE = s_3.$$



Фиг. 50.

Изъ прямоугольнаго треугольника $AF\mu$ находимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin s_1},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin s_2}, \qquad (1)$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin s_3}.$$

Сличая эти соотношенія съ формулами (X) § 53-го, находимъ:

$$\operatorname{tg}\varrho = \overset{}{\underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_1 \sin s_2 \sin s_3}{\sin s_0}}}} = k. \qquad (2)$$

Уравненія (1) можно еще написать въ такомъ видѣ:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin s_1}{\operatorname{tg}\varrho}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin s_2}{\operatorname{tg}\varrho};$$

складывая ихъ почленно, мы получимъ:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{2\sin\frac{s_1+s_2}{2}\cos\frac{s_1-s_2}{2}}{\operatorname{tg}\varrho},$$

или

$$\operatorname{cotg}\varrho = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

При помощи послѣдняго уравненія Деламбра (§ 53, IX) этому равенству можно придать теперь видъ:

$$\operatorname{cotg}\varrho = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{c}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin c\sin\alpha\sin\beta}.$$

Пользуясь, наконецъ, формулой (I) § 53-го, получаемъ:

$$\operatorname{cotg}\varrho = \frac{4}{\Delta}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \qquad (3)$$

2. Радiусы внѣвписанныхъ окружностей ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3.

Если ϱ_1 есть радiусъ внѣвписанной окружности, касающейся стороны a, то легко сообразить, что эта окружность также вписана въ смежный треугольникъ со сторонами a, 180^0-b, 180^0-c. Поэтому формулы (1) – (3) даютъ непосредственно:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho_1}{\sin s_0}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho_2}{\sin s_0}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho_3}{\sin s_0}, \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varrho_1 &= \underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_0 \sin s_2 \sin s_3}{\sin s_1}}}, \qquad \operatorname{tg}\varrho_2 = \underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_0 \sin s_3 \sin s_1}{\sin s_2}}}, \\ \operatorname{tg}\varrho_3 &= \underset{+}{\sqrt{\frac{\sin s_0 \sin s_1 \sin s_2}{\sin s_3}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}\varrho_1 &= \frac{4}{\Delta}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ \operatorname{cotg}\varrho_2 &= \frac{4}{\Delta}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}, \\ \operatorname{cotg}\varrho_3 &= \frac{4}{\Delta}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Перемножая уравненiя (5) попарно, мы получаемъ замѣчательныя соотношенiя:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varrho_1 \operatorname{tg}\varrho_2 &= \sin s_0 \sin s_3, \\ \operatorname{tg}\varrho_2 \operatorname{tg}\varrho_3 &= \sin s_0 \sin s_1, \qquad (7) \\ \operatorname{tg}\varrho_3 \operatorname{tg}\varrho_1 &= \sin s_0 \sin s_2. \end{aligned}$$

3. Каждой изъ формулъ (1) — (7) соотвѣтствуютъ аналогичныя въ планиметрiи (ср. § 31 и § 24). Формула, аналогичная выраженiю (3), можетъ быть выведена изъ соотношенiй (11) и (12) § 31-го; она гласитъ:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{4r}{J}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

гдѣ J есть площадь, а r—радiусъ окружности, описанной около плоскаго треугольника. Вмѣсто Δ здѣсь появилось отношенiе $J:r$. То же относится и къ уравненiю (6).

Нужно замѣтить, что и самый выводъ этихъ формулъ въ планиметрiи можно вести въ совершенно аналогичномъ порядкѣ.

4. Радіусъ R описанной окружности.

Согласно § 39, 14, радіусъ R описанной окружности является величиной, полярной относительно ϱ. Если мы примемъ во вниманіе, что при обозначеніяхъ, которыми мы теперь пользуемся, стороны треугольника служатъ дополненіями угловъ полярнаго треугольника (а не равны самимъ угламъ), то изъ соотношеній (1) — (3) получимъ:

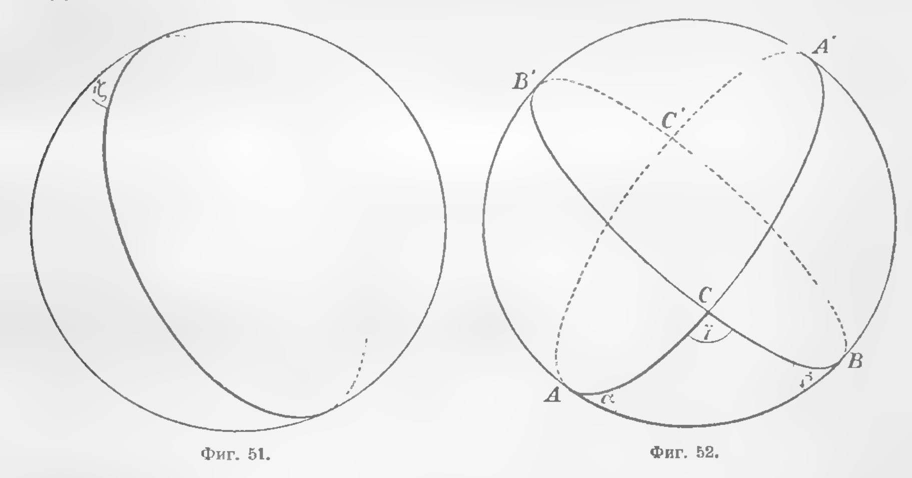
$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2}=\frac{\operatorname{cotg}R}{\cos\sigma_1},\quad \operatorname{cotg}\frac{b}{2}=\frac{\operatorname{cotg}R}{\cos\sigma_2},\quad \operatorname{cotg}\frac{c}{2}=\frac{\operatorname{cotg}R}{\cos\sigma_3},\qquad (8)$$

$$\operatorname{cotg}R=\sqrt{\frac{\cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos\sigma_3}{-\cos\sigma_0}}=\varkappa,\qquad (9)$$

$$\operatorname{tg}R=\frac{4}{D}\cdot\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cdot\qquad (10)$$

5. Площадь i сферическаго треугольника.

Двѣ окружности большихъ круговъ ограничиваютъ на сферѣ четыре „двуугольника". Чтобы опредѣлить площадь z одного изъ нихъ, полезно



Фиг. 51. Фиг. 52.

выразить углы въ дуговой мѣрѣ. Если теперь r снова обозначаетъ радіусъ сферы, F—ея поверхность, ζ -уголъ двуугольника, то очевидно (фиг. 51), что:

$$z : F = \zeta : 2\pi,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$z = 2r^2\zeta.$$

Положимъ теперь; что имѣемъ на сферѣ треугольникъ ABC (въ Эйлеровомъ обозначеніи); пусть A', B', C' будутъ противоположныя точки вершинъ A, B, C (фиг. 52). Въ такомъ случаѣ сумма сферическихъ двуугольниковъ

$$ABA'C,\quad BAB'C,\quad CB'C'A'$$

превышаетъ полусферу (на нашей фигурѣ переднюю) на треугольникъ ABC и противоположный треугольникъ $A'B'C'$. Углы двуугольниковъ (выраженныя въ дуговой мѣрѣ) суть α, β, γ, треугольники же ABC и $A'B'C'$ равновелики, какъ въ этомъ легко убѣдиться. Поэтому

$$2r^2(\alpha+\beta+\gamma) - 2i = 2r^2\pi.$$

Если мы снова положимъ

$$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-\pi,$$

то

$$i = r^2 \cdot \varepsilon. \tag{11}$$

6. Изъ этого мы заключаемъ, что всегда $\varepsilon > 0$, или что сумма угловъ сферическаго треугольника всегда больше 180° (§ 36, 7).

При одномъ и томъ же радіусѣ круга площадь сферическаго треугольника, какъ видно изъ формулы (11), зависитъ только отъ суммы угловъ треугольника. Такъ какъ большей площади соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, бóльшая сумма угловъ, то отсюда вытекаетъ предложеніе:

Подобныхъ треугольниковъ, въ томъ смыслѣ, какъ въ планиметріи, на сферѣ не существуетъ; напротивъ, на сферахъ различныхъ радіусовъ бываютъ подобные треугольники, и ихъ площади относятся, какъ квадраты этихъ радіусовъ.

7. Подобно тому, какъ въ § 36, 4 стороны были выражены, независимо отъ радіуса сферы, отвлеченными, лишенными измѣренія числами, подобно этому цѣлесообразно имѣть число, лишенное измѣренія, также для выраженія площади треугольника. Сообразно этому, мы будемъ называть „раціональной площадью“ сферическаго треугольника величину

$$i_r = \frac{i}{r^2} = \varepsilon. \tag{12}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣетъ мѣсто предложеніе:

Раціональная площадь сферическаго треугольника не зависитъ отъ радіуса сферы, а опредѣляется вполнѣ суммой угловъ треугольника, а именно она равна его сферическому избытку.

8. Для вычисленія площади сферическаго треугольника по даннымъ сторонамъ служитъ формула Люилье (§ 53, XII):

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s_0}{2}\operatorname{tg}\frac{s_1}{2}\operatorname{tg}\frac{s_2}{2}\operatorname{tg}\frac{s_3}{2}} \tag{13}$$

въ связи съ выраженіемъ (11).

„Раціональную“ площадь треугольника эта формула даетъ непосредственно.

§ 56. Соотношенія между сферической и плоской тригонометріей. „Малые“ треугольники: теорема Лежандра.

1. Если вершины A, B, C сферическаго треугольника остаются неподвижными, а радіусъ сферы r неограниченно возрастаетъ, то по представленіямъ обыкновенной Евклидовой геометріи сфера переходитъ въ плоскость, опредѣляемую точками A, B, C, а сферическій треугольникъ въ плоскій.

Стороны a, b, c стремятся при этомъ къ нулю, но длины дугъ, содержащихся между вершинами, не обращаются въ нуль. Сообразно тому, какъ это было выяснено въ § 36, 4, мы положимъ:

$$a = \frac{\bar a}{r}, \quad b = \frac{\bar b}{r}, \quad c = \frac{\bar c}{r}, \tag{1}$$

гдѣ $\bar a, \bar b, \bar c$ суть абсолютныя длины соотвѣтствующихъ дугъ. Мы намѣрены вывести формулы плоской тригонометріи путемъ предѣльнаго перехода изъ формулъ сферической тригонометріи.

2. Изъ формулы (12) § 55

$$i_r = \frac{\bar i}{r^2} = \varepsilon$$

слѣдуетъ, что $\varepsilon = 0$ при $r = \infty$.

Такимъ образомъ, предложеніе о суммѣ угловъ плоскаго треугольника является въ плоской геометріи аналогичнымъ теоремѣ § 55, 7 о раціональной площади сферическаго треугольника.

Далѣе, формула (11) § 55 приводитъ къ предложенію:

Въ планиметріи абсолютная величина площади при имаетъ форму $\bar i = 0 \cdot \infty$. Этимъ выясняется, что въ плоскомъ треугольникѣ площадь не опредѣляется углами, такъ какъ произведеніе $0 \cdot \infty$ представляетъ собой неопредѣленную величину.

3. Чтобы совершить предѣльный переходъ для собственно тригонометрическихъ формулъ, мы воспользуемся приведенными въ I-мъ томѣ на стр. 471 формулами, которыя для безконечно малыхъ угловъ, т. е. при безконечно большомъ R, справедливы съ безконечно большою точностью [12]):

[12]) Это положеніе выражено чрезвычайно неудачно. Въ дѣйствительности справедливо то, что отношенія

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{2(1-\cos x)}{x^2}, \quad \left(x - \sin x\right) : \frac{x^3}{6}, \quad \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right) : \frac{x^4}{24}$$

стремятся къ 1, когда x стремится къ 0. Мы дадимъ болѣе простой выводъ предѣльнаго перехода въ особомъ приложеніи въ концѣ книги.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} = \frac{\bar{x}}{r} - \frac{\bar{x}^3}{6r^3},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 1 - \frac{\bar{x}^2}{2r^2} + \frac{\bar{x}^4}{24r^4}.$$

Такимъ образомъ теорема синусовъ на сферѣ непосредственно переходитъ въ теорему синусовъ плоской тригонометріи.

4. Теорема косинусовъ:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

принимаетъ форму:

$$1 - \frac{\bar{a}^2}{2r^2} + \frac{\bar{a}^4}{24r^4}$$

$$= \left(1 - \frac{\bar{b}^2}{2r^2} + \frac{\bar{b}^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{\bar{c}^2}{2r^2} + \frac{\bar{c}^4}{24r^4}\right) + \left(\frac{\bar{b}}{r} - \frac{\bar{b}^3}{6r^3}\right)\left(\frac{\bar{c}}{r} - \frac{\bar{c}^3}{6r^3}\right)\cos \alpha.$$

Раскрывая скобки, умножая на $-2r^2$ и опуская члены, которые содержатъ $1/r$ въ степени выше четвертой, мы получаемъ:

$$\begin{aligned} \bar{a}^2 &= \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\bar{b}\bar{c}\cos\alpha \\ &- \frac{1}{12r^2}\left[\bar{b}^4 + 6\bar{b}^2\bar{c}^2 + \bar{c}^4 - \bar{a}^4 - 4\bar{b}\bar{c}(\bar{b}^2 + \bar{c}^2)\cos\alpha\right]. \end{aligned} \quad (2)$$

При $r = \infty$ отсюда слѣдуетъ:

Теорема косинусовъ на сферѣ также переходитъ въ соотвѣтствующую теорему въ плоской тригонометріи.

5. Этимъ путемъ можно для каждой формулы сферической тригонометріи найти соотвѣтствующую ей въ плоской. Подчеркнемъ еще формулу (13) § 55, заслуживающую особеннаго вниманія. Такъ какъ ε стремится къ 0, то $\operatorname{tg} \varepsilon/4$ можно замѣнить черезъ $\varepsilon/4$; далѣе $s_i = \bar{s}_i/r$. Поэтому соотношеніе (13) даетъ для плоскаго треугольника извѣстное выраженіе площади треугольника

$$\sqrt{\bar{s}_0 \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{s}_3} = \lim r^2 \varepsilon = \bar{i},$$

(см. § 24, (6); § 31, (7)).

6. Мы разсматривали сейчасъ плоскій треугольникъ, какъ предѣлъ сферическаго.

Для геодезиста-практика несравненно болѣе важное значеніе имѣетъ вопросъ: Можно ли — и, если можно, то при какихъ условіяхъ —

трактовать сферическій треугольникъ при вычисленіяхъ, какъ плоскій.

Отвѣтъ на этотъ вопросъ даетъ теорема Лежандра, которая въ практикѣ находитъ себѣ широкое примѣненіе.

Если сферическій треугольникъ имѣетъ малыя стороны, а вслѣдствіе этого и малый сферическій избытокъ, то его площадь приближенно равняется площади плоскаго треугольника, стороны котораго имѣютъ тѣ же абсолютныя длины; каждый же уголъ сферическаго треугольника превышаетъ на одну треть сферическаго избытка соотвѣтствующій уголъ плоскаго треугольника.

Выраженіе „малый" треугольникъ страдаетъ, конечно, нѣкоторой неопредѣленностью. Геодезія даетъ опредѣленныя практическія правила относительно предѣловъ примѣнимости этого предложенія. Намъ достаточно сказать такъ: если стороны сферическаго треугольника опредѣляются равенствами

$$a = \frac{\bar{a}}{r}, \quad b = \frac{\bar{b}}{r}, \quad c = \frac{\bar{c}}{r},$$

то длины $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ должны быть малы по сравненію съ r и при томъ настолько, чтобы членами порядка $(\bar{a}/r)^4$ и выше, во всякомъ случаѣ, можно было пренеберечь. Сферическій же избытокъ долженъ быть настолько малъ, чтобы съ тѣмъ же приближеніемъ можно было принимать $\varepsilon = \operatorname{tg}\varepsilon = \sin\varepsilon$ и $\cos\varepsilon = 1$. Сферическій треугольникъ ABC, въ которомъ стороны $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ выражены въ линейной мѣрѣ, а углы суть α, β γ, сопоставляется въ теоремѣ Лежандра съ плоскимъ треугольникомъ $A_1B_1C_1$, который имѣетъ тѣ же стороны $\bar{a}$, $\bar{b}$ $\bar{c}$, углы же равны $\alpha_1 = \alpha - \varepsilon/3$, $\beta_1 = \beta - \varepsilon/3$, $\gamma_1 = \gamma - \varepsilon/3$.

При сдѣланныхъ предположеніяхъ мы получаемъ для площади совершенно такъ же, какъ въ п. 5, выраженіе:

$$i = r^2\varepsilon = 4r^2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\bar{s}_0 \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{s}_3} = i_1;$$

этимъ доказана первая часть предложенія.

7. Обращаясь къ доказательству второй части, мы выведемъ изъ уравненія (2), опуская члены, содержащія $1/r$ въ четвертой степени и высшихъ, соотношеніе

$$\bar{a}^4 = (\bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\bar{b}\bar{c}\cos\alpha)^2 + \frac{K}{r^2},$$

гдѣ K есть величина, не зависящая отъ r. Если мы подставимъ это выраженіе вмѣсто $\bar{a}^4$ внутри прямоугольныхъ скобокъ въ уравненіи (2) и

вновь опустимъ члены четвертой степени и выше относительно $1/r$, то уравненіе (2) приметъ видъ:

$$\bar a^2 = \bar b^2 + \bar c^2 - 2\bar b\bar c\cos\alpha - \frac{\bar b^2 \bar c^2 \sin^2\alpha}{3r^2}.$$

При нашихъ предположеніяхъ здѣсь можно положить

$$\tfrac{1}{2}\bar b\bar c\sin\alpha = i,$$

такъ что мы получимъ:

$$\bar a^2 = \bar b^2 + \bar c^2 - 2\bar b\bar c\cos\alpha - \frac{2i}{3r^2}\bar b\bar c\sin\alpha.$$

Такъ какъ, съ другой стороны, согласно § 55, (12), $i/r^2 = \varepsilon$, то

$$\bar a^2 = \bar b^2 + \bar c^2 - 2\bar b\bar c\left(\cos\alpha + \frac{\varepsilon}{3}\sin\alpha\right);$$

такъ какъ далѣе

$$\cos\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\varepsilon}{3} + \sin\alpha\sin\frac{\varepsilon}{3},$$

и мы можемъ положить $\cos\varepsilon/3 = 1$, $\sin\varepsilon/3 = \varepsilon/3$, то

$$\bar a^2 = \bar b^2 + \bar c^2 - 2\bar b\bar c\cos\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right). \qquad (3)$$

Если мы присоединимъ сюда еще двѣ другія формулы, которыя получаются изъ этой круговой замѣной то и вторая часть теоремы Лежандра будетъ доказана.

8. Другое весьма изящное доказательство теоремы Лежандра, которое, въ противоположность предыдущему исходитъ изъ теоремы синусовъ, далъ Эпштейнъ *).

Мы напишемъ теорему синусовъ въ такой формѣ:

$$\sin\alpha\sin\frac{b}{r} = \sin\beta\sin\frac{a}{r}.$$

Выражая $\sin a/r$ и $\sin b/r$ рядами, мы отсюда получаемъ:

$$\sin\alpha\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3} + \cdots\right) = \sin\beta\left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3} + \cdots\right).$$

Умножая обѣ части на r и ограничиваясь членами, степень которыхъ относительно $1/r$ не превышаетъ второй, мы получаемъ:

*) Epstein. Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 36, 1907.

$$b\left(\sin\alpha - \frac{b^2}{6r^2}\sin\alpha\right) = \bar{a}\left(\sin\beta - \frac{\bar{a}^2}{6r^2}\sin\beta\right).$$

Въ виду же соотношенія

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\varepsilon}{i}$$

мы получаемъ:

$$b\left(\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\,\frac{b^2\sin\alpha}{2i}\right) = \bar{a}\left(\sin\beta - \frac{\varepsilon}{3}\,\frac{\bar{a}^2\sin\beta}{2\bar{i}}\right).$$

Обѣ стороны этого равенства можно разсматривать, какъ ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ ε. Такъ какъ здѣсь нужно сохранить только первыя степени, то къ коэффиціентамъ при ε можно непосредственно примѣнить правила плоской тригонометріи. Сообразно этому мы полагаемъ съ лѣвой стороны:

$$2i = bc\sin\alpha,$$

а съ правой:

$$2\bar{i} = \bar{a}c\sin\beta;$$

тогда мы получаемъ:

$$\bar{b}\left(\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\,\frac{b}{c}\right) = \bar{a}\left(\sin\beta - \frac{\varepsilon}{3}\,\frac{\bar{a}}{c}\right);$$

если здѣсь снова положимъ слѣва:

$$b = c\cos\alpha + \bar{a}\cos\gamma,$$

а справа:

$$\bar{a} = \bar{c}\cos\beta + b\cos\gamma,$$

то получимъ:

$$b\left[\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\left(\cos\alpha + \frac{\bar{a}}{c}\cos\gamma\right)\right] = \bar{a}\left[\sin\beta - \frac{\varepsilon}{3}\left(\cos\beta + \frac{\bar{b}}{c}\cos\gamma\right)\right].$$

Здѣсь членъ $\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{\bar{a}b}{i}\cos\gamma$ съ одной и съ другой стороны отпадаетъ, и остается

$$b\left(\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha\right) = \bar{a}\left(\sin\beta - \frac{\varepsilon}{3}\cos\beta\right),$$

или

$$b\sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \bar{a}\sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Это и есть теорема Лежандра

Книга III.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ И СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА VII.

Аналитическая геометрія на плоскости.

§ 57. Координаты.

1. Для нахожденія новыхъ истинъ и для веденія доказательствъ геометрія пользуется двумя различными методами, изъ коихъ одинъ, болѣе старый, называется синтетическимъ, другой — аналитическимъ. Синтетическая геометрія имѣетъ своимъ источникомъ непосредственное созерцаніе пространственныхъ образовъ и является дальнѣйшимъ развитіемъ „Началъ“ Евклида. При каждомъ своемъ шагѣ она позволяетъ непосредственно видѣть геометрическую природу пріема, употребленнаго при доказательствѣ, но не имѣетъ въ своихъ изслѣдованіяхъ столь опредѣленнаго предуказаннаго пути, какъ аналитическій методъ.

Искусство же аналитиковъ состоитъ въ томъ, что они, устраняя неизящныя вычисленія, разрабатываютъ алгебраическія идеи и, такимъ образомъ, вмѣсто созерцанія пространства пользуются разсматриваніемъ чиселъ *).

2. Средствомъ, къ которому преимущественно прибѣгаетъ аналитическая геометрія, являются координаты; мы ими уже пользовались въ восьмой главѣ первой части для геометрическаго представленія комплексныхъ чиселъ.

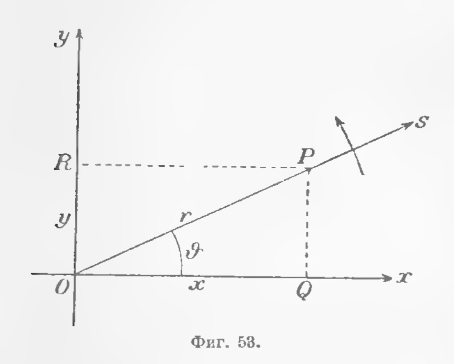
Возьмемъ на плоскости двѣ произвольныя взаимно перпендикулярныя оси ось x-овъ и ось y-овъ, пересѣкающіяся въ нѣкоторой точкѣ O, называемой началомъ координатъ. На каждой изъ этихъ прямыхъ мы по произволу одно изъ направленій будемъ называть положительнымъ.

*) Открытіе аналитической геометріи приписывается Декарту, сочиненіе котораго „Géometrie“ вышло въ свѣтъ въ 1637 году. Одновременно и независимо отъ него къ тѣмъ же идеямъ пришелъ и Ферма (письмо къ Робервалю, 1636); въ статьяхъ, опубликованныхъ имъ позже, онъ уходитъ даже дальше Декарта. Уже у Аполлонія замѣтны слѣды аналитическихъ пріемовъ. У Гессе (Hesse) (1811—1874) методы аналитической геометріи получили наиболѣе совершенную формальную разработку.

Для того, чтобы опредѣлить положеніе точки P, опустимъ изъ нея на обѣ оси перпендикуляры; основанія послѣднихъ обозначимъ соотвѣтственно черезъ Q и R. Если длину каждаго изъ отрѣзковъ OQ и OR снабдимъ положительнымъ или отрицательнымъ знакомъ, смотря по тому, лежить ли соотвѣтствующая изъ точекъ Q и R на своей оси въ положительномъ или отрицательномъ направленіи отъ O, то полученныя такимъ образомъ числа x и y называются координатами точки P. Если онѣ даны, то положеніе точки P опредѣляется однозначно. Ихъ называютъ прямоугольными или Декартовыми координатами въ отличіе отъ другихъ координатъ, примѣръ которыхъ мы сейчасъ приведемъ.

3. Каждая прямая линія опредѣляетъ два противоположныя направленія. Если же изъ нѣкоторой точки провести прямую, какъ „лучъ", только въ одну сторону, то получается лишь одно опредѣленное направленіе. Черезъ каждую произвольную точку плоскости можно провести лучь, параллельный данному лучу; всѣ такіе параллельные лучи имѣютъ одно и то же направленіе [1]).

Для того, чтобы нѣкоторое направленіе, заданное лучемъ, опредѣлить при помощи системы координатъ, проведемъ черезъ начало параллельный ему лучъ s и представимъ себѣ, что нѣкоторый подвижный лучь первоначально совпадавшій съ осью x-овъ, при помощи вращенія на подобіе часовой стрѣлки, достигаетъ направленія s.



Фиг. 53.

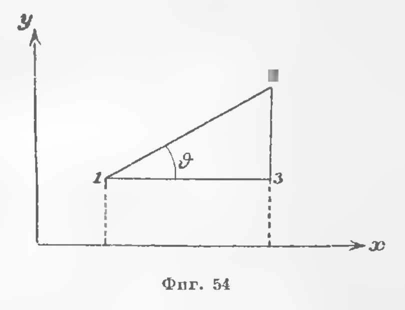
Мы (по произволу) называемъ вращеніе положительнымъ, если оно происходить въ направленіи отъ положительной части оси x-овъ къ положительной части оси y-овъ (на нашемъ чертежѣ это направленіе указано стрѣлкой); вращеніе же въ противоположную сторону мы называемъ отрицательнымъ. Если теперь разумѣть подь угломь ϑ наименьшее положительное вращеніе, при помощи котораго можно перейти отъ положительнаго направленія оси x-овъ къ направленію s, то ϑ содержится между 0 и 2π. Каждый уголъ ϑ, взятый въ этомъ интервалѣ, характеризуетъ одно и только одно направленіе s; но вращенія, отличающіяся другъ отъ друга на положительное или отрицательное число, кратное 2π, характеризуютъ одно и то же направленіе. Такимъ образомъ, направленіе опредѣляется однозначно, коль скоро даны $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$.

[1]) Т. е., будучи параллельны, также направлены въ одну и ту же сторону.

4. На основанiи изложеннаго положенiе точки P можетъ быть опредѣлено также направленiемъ и длиною луча r, проведеннаго отъ начала къ точкѣ P. Направленiе опредѣляется угломъ ϑ, который можно заключить въ любой интервалъ размѣромъ въ 2π, напримѣръ, въ интервалъ 0, 2π или $-\pi$, $+\pi$ (при этомъ одно изъ двухъ предѣльныхъ значенiй исключается изъ интервала, а другое — включается въ него). Длина r измѣряется произвольной единицей длины, но всегда разсматривается, какъ положительная величина. Такимъ образомъ, величины r и ϑ однозначно опредѣляютъ положенiе точки P; поэтому и ихъ также называютъ координатами точки P, а именно полярными координатами, въ отличiе отъ прямоугольныхъ. Начальная точка O называется полюсомъ этой системы координатъ.

5. Задача: Пусть двѣ точки 1 и 2 заданы координатами x_1, y_1 и x_2, y_2. Требуется опредѣлить ихъ разстоянiе (12) и направленiе отъ точки 1 къ точкѣ 2.

Рѣшенiе задачи просто выводится изъ фиг. 54. Если черезъ точки 1, 2 провести прямыя, параллельныя оси x-овъ и оси y-овъ, то получится прямоугольный треугольникъ (123), въ которомъ сторона (12) является гипотенузой, а катеты (13) и (23) равны соотвѣтственно $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$, если не обращать вниманiя на знаки. Если уголъ ϑ лежитъ въ первомъ квадрантѣ, то обѣ разности являются положительными числами и мы получаемъ равенства:

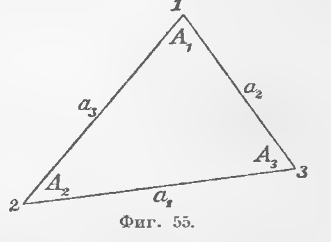


Фиг. 54

$$x_2 - x_1 = (12)\cos\vartheta, \quad y_2 - y_1 = (12)\sin\vartheta, \tag{1}$$

$$(12) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2}$$

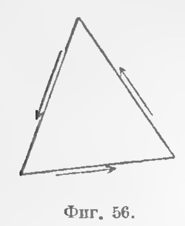
Если же точка 2 вращается въ положительномъ направленiи вокругъ точки 1, то $x_2 - x_1$ измѣняетъ свой знакъ при переходѣ изъ перваго квадранта во второй, а $y_2 - y_1$ — при переходѣ въ третiй квадрантъ. Такимъ образомъ, эти разности измѣняютъ свой знакъ точно такъ же, какъ $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, и, слѣдовательно, формулы (1) справедливы для всякаго положенiя точекъ 1, 2.



Фиг. 55.

6. Пусть три точки 1, 2, 3, образующiя треугольникъ, заданы своими координатами x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 (фиг. 55). Обозначенiя мы выбираемъ такъ, чтобы движенiе по сторонамъ треугольника въ

направленіи 1, 2, 3 отвѣчало положительному вращенію (фиг. 56). Требуется выразить съ помощью координатъ стороны a_1, a_2, a_3 и углы A_1, A_2, A_3 треугольника.

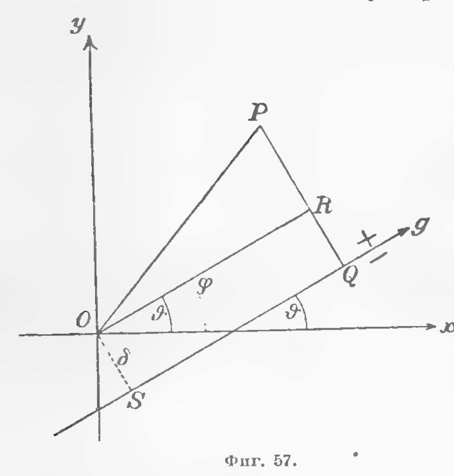

Фиг. 56.

Рѣшеніе этой задачи получается непосредственно изъ соотношеній (1) и (2). Прежде всего имѣютъ мѣсто равенства

$$a_1 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2},$$
$$a_2 = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2},$$
$$a_3 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если, далѣе, углы, образуемые направленіями 23, 31, 12 съ осью x-овъ, обозначить черезъ ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, то

$$A_1 = \vartheta_2 - \vartheta_3 \pm \pi,$$
$$A_2 = \vartheta_3 - \vartheta_1 \pm \pi,$$
$$A_3 = \vartheta_1 - \vartheta_2 \pm \pi,$$



Фиг. 57.

и, слѣдовательно,

$$\sin A_1 = \sin\vartheta_3\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_3\sin\vartheta_2,$$
$$\cos A_1 = -\cos\vartheta_3\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_3\sin\vartheta_2.$$

Затѣмъ, согласно равенствамъ (1),

$$a_2\cos\vartheta_2 = x_1 - x_3,$$
$$a_2\sin\vartheta_2 = y_1 - y_3,$$
$$a_3\cos\vartheta_3 = x_2 - x_1,$$
$$a_3\sin\vartheta_3 = y_2 - y_1,$$

и, слѣдовательно,

$$a_2a_3\sin A_1 = (x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_1 - y_3),$$
$$a_2a_3\cos A_1 = (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_1 - y_3).$$

Первая изъ этихъ формулъ вмѣстѣ съ тѣмъ даетъ намъ удвоенную площадь треугольника. И если мы эту удвоенную площадь обозначимъ черезъ Δ, то, произведя умноженіе, получимъ:

$$\Delta = (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1). \qquad (3)$$

Пользуясь этимъ выраженіемъ, слѣдуетъ, однако, обратить вниманіе на то, чтобы послѣдовательность точекъ 1, 2, 3 была выбрана именно такою, какъ мы ее установили выше. Если измѣнить эту послѣдовательность и замѣстить напримѣръ, точки 1 и 2 одну другой, то выраженіе (3) измѣнитъ свой знакъ и будетъ представлять, такимъ образомъ, удвоенную площадь съ обратнымъ знакомъ.

7. На прямой линіи g существуютъ два противоположныхъ направленія. Одно изъ этихъ направленій по произволу мы назовемъ положительнымъ и обозначимъ его на фиг. 57 стрѣлкой.

Каждая точка, взятая на прямой, дѣлитъ ее на положительную и отрицательную полупрямыя.

Для того же, чтобы вполнѣ опредѣлить линію g, необходимо, кромѣ направленія, указать еще одно условіе, которому она должна удовлетворять; можно, напримѣръ, потребовать, чтобы линія g проходила черезъ данную точку. Вмѣсто этого можетъ быть дано ея разстояніе отъ начала координатъ, выражаемое перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ начала. Но если это разстояніе не равно нулю, т. е. прямая не проходитъ черезъ начало, то она этимъ путемъ опредѣляется не однозначно, а двузначно [2]).

8. Съ цѣлью устранить эту двузначность, мы замѣтимъ, что плоскость дѣлится прямой g на двѣ полуплоскости, и будемъ считать положительной ту изъ нихъ, въ которую вступаетъ положительный лучъ прямой g при положительномъ вращеніи вокругъ какой-либо ея точки; на нашемъ чертежѣ положительной будетъ та полуплоскость, которая представляла бы лѣвый берегъ рѣки, текущей въ направленіи, совпадающемъ съ положительнымъ направленіемъ линіи g.

Далѣе, мы будемъ считать разстояніе точки P отъ линіи g положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, лежитъ ли точка P съ положительной или отрицательной стороны отъ прямой g.

Прямая g опредѣляется однозначно, если направленіе ея задано угломъ ϑ и разстояніе ея δ отъ начала координатъ, дано по величинѣ и по знаку.

9. Мы ставимъ себѣ теперь слѣдующую задачу. Положимъ, что прямая g задана при помощи ϑ и δ, и что, сверхъ того, дана нѣкоторая точка P — своими координатами x, y. Требуется опредѣлить разстояніе D точки P отъ линіи g.

Для рѣшенія этой задачи опустимъ изъ точки P (фиг. 57) на линію g перпендикуляръ PQ, длина котораго равна D. Затѣмъ проведемъ черезъ O прямую OR, параллельную g, и опустимъ на прямую g перпендикуляръ $OS = \delta$.

Если φ есть уголъ, который направленіе OP образуетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ, и r есть разстояніе OP, то, на основаніи п. 4.,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

[2]) На данномъ разстояніи отъ начала проходятъ двѣ прямыя даннаго направленія по одну и по другую сторону отъ начала.

изъ прямоугольнаго же треугольника OPR получаемъ:

$$PR = r\sin(\varphi - \vartheta) = r(\sin\varphi\cos\vartheta - \cos\varphi\sin\vartheta).$$

Но $D = PR + RQ$ и $RQ = OS = \delta$, откуда

$$D = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta + \delta. \qquad (4)$$

На чертежѣ точки O и P обѣ лежатъ съ положительной стороны прямой g, и точка P отстоитъ отъ послѣдней дальше, чѣмъ начало координатъ O, т. е. $D > \delta$. Если же $D < \delta$ и δ остается еще положительнымъ, то $\sin(\varphi - \vartheta)$ будетъ отрицательнымъ числомъ, и тогда $PR = -r\sin(\varphi - \vartheta)$. Но одновременно съ этимъ также $D = -PR + RQ$, если подъ PR и RQ разумѣть абсолютныя величины соотвѣтствующихъ разстояній, а D брать съ надлежащимъ знакомъ. Слѣдовательно, равенство (4) остается справедливымъ и въ этомъ случаѣ. Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться въ справедливости этой формулы, если точка O лежитъ съ отрицательной стороны прямой g и если разстояніе δ имѣетъ, такимъ образомъ, отрицательное значеніе.

10. Если за прямую мы g возьмемъ ось x-овъ и положительнымъ ея направленіемъ будемъ считать положительное направленіе оси x-овъ, то $\delta = 0$, $\vartheta = 0$ и $D = y$. Если же за положительное направленіе прямой g мы выберемъ положительное направленіе оси y-овъ, то $\vartheta = \pi/2$ и $D = -x$.

§ 58. Уравненіе прямой.

1. Если мы хотимъ аналитически выразить то обстоятельство, что точка P должна лежать на прямой g, то намъ нужно только положить равнымъ нулю разстояніе D точки P отъ прямой g, выражаемое соотвѣтствующимъ перпендикуляромъ, и мы получимъ, на основаніи § 57 (4), равенство

$$-x\sin\vartheta + y\cos\vartheta + \delta = 0. \qquad (1)$$

Это равенство показываетъ, что координаты x, y отвѣчаютъ нѣкоторой точкѣ на прямой, опредѣляемой величинами ϑ и δ.

На этомъ основаніи это равенство называютъ уравненіемъ прямой.

Такимъ образомъ, если одна изъ двухъ координатъ x, y точки прямой взята произвольно, то другая опредѣляется изъ этого уравненія, и, если мы одну изъ нихъ будемъ непрерывно измѣнять, то и другая въ зависимости отъ этого будетъ измѣняться нѣкоторымъ опредѣленнымъ образомъ.

Равенство (1) не измѣнитъ своего содержанія, если мы умножимъ его на число h, отличное отъ нуля и, такимъ образомъ, представимъ въ формѣ:

$$-hx\sin\vartheta + hy\cos\vartheta + h\delta = 0. \qquad (2)$$

Далѣе, если положить

$$p \sin\vartheta = a, \quad p \cos\vartheta = b, \quad p\delta = c, \tag{3}$$

то оно приметъ видъ:

$$ax + by + c = 0; \tag{4}$$

это равенство есть уравненіе той же прямой. Уравненіе (1) называется (по Гессе) **нормальнымъ видомъ**, а уравненіе (4) **общимъ видомъ** уравненія прямой.

2. Если мы имѣемъ уравненіе вида (4) съ произвольно заданными коэффиціентами a, b, c (при чемъ a и b не равны одновременно нулю), то всегда можно найти соотвѣтствующую прямую, уравненіемъ коей оно является.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенствъ (3) вытекаетъ, что $p = \sqrt{a^2 + b^2}$, откуда

$$\sin\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

чѣмъ опредѣляются два противоположныя направленія, отвѣчающія одной и той же прямой. Если квадратному корню приписать опредѣленный знакъ, напримѣръ, положительный, то тѣмъ самымъ будетъ выбрано за положительное одно изъ этихъ двухъ направленій; именно, если при этомъ a положительное число, то положительнымъ окажется то направленіе, уголъ котораго съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ лежитъ въ третьемъ или въ четвертомъ квадрантѣ. Итакъ, этимъ путемъ опредѣляется какъ направленіе прямой g, такъ и положительная ея сторона[3]).

Въ силу равенства

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

прямая g отстоитъ на разстояніи δ отъ начала координатъ O, при чемъ точка O лежитъ съ положительной или съ отрицательной стороны отъ g въ зависимости отъ того, является ли δ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ.

Поэтому каждое уравненіе вида (4) мы будемъ называть **уравненіемъ прямой линіи**, а также — **линейнымъ уравненіемъ**.

3. Если въ уравненіи (2) положить

$$p = \frac{1}{\cos\vartheta}, \quad \delta = -l \cos\vartheta,$$

[3]) Т. е. изъ двухъ полуплоскостей, на которыя дѣлится плоскость прямою g, опредѣляется та, которую, согласно заключенному выше (§ 57, 8) условію, мы называемъ положительной.

то оно приметъ видъ

$$y = x \operatorname{tg}\vartheta + l, \tag{5}$$

гдѣ ордината y представлена въ видѣ *линейной функціи* отъ x. Здѣсь l является значеніемъ y, которое отвѣчаетъ абциссѣ $x = 0$, т. е. точкѣ пересѣченія съ осью y-овъ.

Уравненіе прямой не можетъ быть приведено къ этому виду, въ которомъ оно часто употребляется, только въ томъ случаѣ, если ϑ есть прямой уголъ, такъ что $\cos\vartheta = 0$. Въ этомъ случаѣ прямая параллельна оси y-овъ, и всѣмъ точкамъ прямой отвѣчаетъ одно и то же значеніе абсциссы x.

Если уравненіе прямой дано въ общемъ видѣ (4), то всегда

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{a}{b}, \tag{6}$$

и, если ν обозначаетъ уголъ, который образуетъ съ осью x-овъ перпендикуляръ къ прямой (*нормаль прямой*), то, каково бы ни было направленіе нормали, имѣетъ мѣсто равенство

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{b}{a}. \tag{7}$$

Такимъ образомъ, уравненія

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ bx - ay + d &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

каковы бы ни были значенія постоянныхъ a, b, c, d, представляютъ собой уравненія двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ.

4. Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ пользоваться равенствами двоякаго рода. Во-первыхъ, будутъ встрѣчаться такія равенства между координатами x, y, которыя устанавливаютъ для этихъ координатъ нѣкоторое *ограниченіе* [4]); таковы, напримѣръ, уравненіе прямой, удовлетворяющееся лишь тѣми значеніями x, y, которыя являются координатами точки прямой; во-вторыхъ, мы будемъ употреблять также и такія равенства между x, y, которыя справедливы для *всѣхъ точекъ плоскости*; въ этомъ случаѣ обѣ части равенства являются, такъ сказать, лишь различными обозначеніями одного и того же объекта. Такія равенства мы называемъ *тождествами* или *тождественными равенствами*. Иногда является цѣлесообразнымъ пользоваться различными обозначеніями для этихъ двухъ видовъ равенствъ. Въ такихъ случаяхъ, мы будемъ употреблять для тождествъ знакъ $\equiv$ (въ словахъ: „*тождественно равно*“).

[4]) Равенства именно такого рода и называются на русскомъ языкѣ *уравненіями*.

5. Для простоты мы будемъ часто болѣе сложныя алгебраическія выраженія обозначать одной буквой. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ тождествами; такимъ образомъ, если мы положимъ

$$A \equiv -x \sin\vartheta + y \cos\vartheta + \delta,$$

то равенство $A = 0$ будетъ уравненіемъ прямой въ нормальномъ видѣ. Если же положимъ

$$U \equiv ax + by + c,$$

то равенство $U = 0$ есть уравненіе той же прямой въ общемъ видѣ. Мы иной разъ будемъ пользоваться символами A, U, какъ обозначеніями самой прямой. Въ такомъ случаѣ, согласно § 57 (4), имѣетъ мѣсто теорема:

Если въ выраженіе A, представляющее собою лѣвую часть уравненія прямой g въ нормальномъ видѣ, подставить координаты x, y точки, не лежащей на прямой g, то получится разстояніе этой точки отъ прямой g (выраженное соотвѣтствующимъ перпендикуляромъ), съ отрицательнымъ или положительнымъ знакомъ въ зависимости отъ того, лежитъ ли точка x, y съ отрицательной или положительной стороны прямой g.

Всѣ точки, равноотстоящія отъ двухъ данныхъ прямыхъ, лежатъ на двухъ биссектрисахъ угловъ, составленныхъ этими прямыми.

Такимъ образомъ, если равенства $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ являются уравненіями данныхъ прямыхъ въ нормальномъ видѣ, то равенства

$$A_1 - A_2 = 0, \quad A_1 + A_2 = 0$$

представляютъ собой уравненія обѣихъ биссектрисъ (не въ нормальномъ видѣ), а именно: первая изъ этихъ прямыхъ дѣлитъ пополамъ какъ уголъ, расположенный по положительную сторону обѣихъ прямыхъ, такъ и уголъ, расположенный отъ нихъ въ отрицательную сторону; вторая же дѣлитъ пополамъ углы, расположенные по положительную сторону отъ одной прямой и по отрицательную — отъ другой.

§ 59. Точки пересѣченія прямыхъ.

1. Если требуется найти точку пересѣченія [5]) двухъ прямыхъ, заданныхъ уравненіями въ общемъ видѣ:

$$U_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$U_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

то величины x, y разсматриваютъ, какъ неизвѣстныя, которыя подлежатъ опредѣленію изъ этихъ двухъ линейныхъ уравненій.

[5]) Т. е., конечно, координаты точки пересѣченія.

Согласно § 39 I-го тома существуетъ одна и только одна точка пересѣченія, за исключеніемъ того случая, когда опредѣлитель $a_1 b_2 - a_2 b_1$ равенъ нулю; тогда эти прямыя либо совпадаютъ, либо же параллельны. Мы всегда можемъ принять, что либо коэффиціенты a_1 и a_2, либо коэффиціенты b_1 и b_2 оба отличны отъ нуля; ибо, если a_2 и $a_1 b_2 - a_2 b_1$ равны нулю, то необходимо $a_1 = 0$, такъ какъ a_2 и b_2 не должны обращаться въ нуль одновременно, такъ что b_1 и b_2 отличны отъ нуля. Если примемъ, такимъ образомъ, что a_1 и a_2 не обращаются въ нуль, то при $a_1 b_2 = a_2 b_1$ получимъ тождество:

$$a_1 U_2 - a_2 U_1 - a_1 c_2 + a_2 c_1 \equiv 0,$$

при чемъ будетъ имѣть мѣсто первый или второй случай [6]) въ зависимости отъ того, обращается ли въ нуль выраженіе $a_1 c_2 - a_2 c_1$, или нѣтъ.

2. Для того, чтобы уравненія $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ представляли одну и ту же прямую, необходимо и достаточно, чтобы существовали два отличныхъ отъ нуля числовыхъ множителя m_1, m_2, для которыхъ имѣло бы мѣсто тождество

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 \equiv 0. \qquad (1)$$

Для того же, чтобы прямыя U_1, U_2 были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы могли быть указаны три отличныхъ отъ нуля числа m_1, m_2, m_3, для которыхъ

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 + m_3 \equiv 0. \qquad (2)$$

3. Мы разсмотримъ теперь три прямыхъ линіи и положимъ

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1, \\ U_2 &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2, \\ U_3 &\equiv a_3 x + b_3 y + c_3. \end{aligned} \qquad (3)$$

Всегда можно опредѣлить три коэффиціента m_1, m_2, m_3 такъ, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 &= 0; \\ b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 &= 0. \end{aligned}$$

Стоитъ лишь, согласно § 41 I-го тома, положить

$$m_1 : m_2 : m_3 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) : (a_3 b_1 - a_1 b_3) : (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

[6]) Т. е. прямыя совпадаютъ или параллельны. Если $a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$, то тождество, приведенное въ текстѣ, обнаруживаетъ, что координаты точки, удовлетворяющія одному уравненію, удовлетворяютъ также другому, т. е. оба уравненія выражаютъ одну и ту же прямую; если же $a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0$, то то же тождество обнаруживаетъ, что координаты точки, удовлетворяющія первому уравненію, не могутъ удовлетворять второму; уравненія выражаютъ поэтому прямыя, не имѣющія точки пересѣченія.

При этомъ если между тремя прямыми U_1, U_2, U_3 нѣтъ двухъ параллельныхъ, то числа m_1, m_2, m_3 отличны отъ нуля; но тогда изъ соотношенiй (3) получается:

$$m_1U_1 + m_2U_2 + m_3U_3 \equiv m_1c_1 + m_2c_2 + m_3c_3.$$

Если теперь эти три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, то существуетъ пара значенiй x, y, для которыхъ U_1, U_2, U_3 одновременно обращаются въ нуль; тогда $m_1c_1 + m_2c_2 + m_3c_3 = 0$, и, такимъ образомъ, должно существовать тождество:

$$m_1U_1 + m_2U_2 + m_3U_3 \equiv 0. \tag{4}$$

Если, наоборотъ, выполняется это тождество, то въ точкѣ пересѣченiя прямыхъ U_1 и U_2 обращается въ нуль и U_3, и, такимъ образомъ, всѣ три прямыя проходятъ черезъ одну точку. Отсюда мы получаемъ теорему:

Условiемъ, необходимымъ и достаточнымъ для того, чтобы три прямыя U_1, U_2, U_3 проходили черезъ одну точку, является существованiе трехъ отличныхъ отъ нуля множителей m_1, m_2, m_3, для которыхъ выполнялось бы тождество (4).

Но теорема нуждается въ дополненiи, такъ какъ мы приняли, что среди прямыхъ U_1, U_2, U_3 нѣтъ двухъ параллельныхъ. Если выполняется тождество (4), и двѣ изъ этихъ прямыхъ пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ, то и третья прямая проходитъ черезъ ту же точку. Такимъ образомъ, если двѣ изъ названныхъ прямыхъ параллельны, то и третья должна быть параллельна двумъ первымъ. Наоборотъ, изъ п. 2 слѣдуетъ, что можно удовлетворить тождеству (4), если три прямыя параллельны [7]). Чтобы устранить это исключенiе, говорятъ также, что *параллельныя прямыя пересѣкаются въ безконечно удаленной точкѣ*; тогда формулированная выше теорема справедлива всегда.

4. Та же теорема иначе можетъ быть выражена такъ:

Если U_1, U_2 — двѣ данныя прямыя, то равенство

$$U \equiv mU_1 + nU_2 = 0,$$

гдѣ m, n — постоянные множители, представляетъ собою уравненiе нѣкоторой другой прямой, проходящей черезъ точку пересѣченiя прямыхъ U_1 и U_2. Если m отлично отъ нуля, такъ что прямая U не совпадаетъ съ прямой U_2, то можно замѣнить U черезъ mU и положить $n = \lambda m$. Этимъ путемъ мы придадимъ уравненiю простѣйшiй видъ:

$$U \equiv U_1 + \lambda U_2;$$

---

[7]) Если три прямыя параллельны, то кромѣ тождества (2) имѣетъ еще мѣсто тождество

$$m_1'U_1 + m_2'U_2 + m_3' = 0. \tag{2'}$$

Умножая тождество (2) на m_3', тождество (2') на m_3 и вычитывая, получимъ тождества (4).

если измѣнять въ немъ λ, то получатся всѣ прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія прямыхъ U_1 и U_2, за исключеніемъ линіи U_2; можно считать ее соотвѣтствующей значенію $\lambda = \infty$ [8]). Совокупность всѣхъ этихъ прямыхъ называется пучкомъ лучей; λ носитъ названіе параметра пучка.

§ 60. Примѣненія къ геометріи треугольника.

1. Изъ теоремъ, изложенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, съ большою легкостью могутъ быть получены теоремы о точкахъ пересѣченія трансверсалей треугольника, выходящихъ изъ его вершинъ.

Положительныя направленія для сторонъ треугольника мы выбираемъ такъ, чтобы движеніе по сторонамъ въ этихъ направленіяхъ отвѣчало направленію положительнаго обхода; тогда внутреннія точки треугольника лежатъ съ положительной стороны отъ всѣхъ трехъ прямыхъ.

Пусть $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ будутъ уравненія этихъ трехъ прямыхъ въ нормальномъ видѣ. Тогда равенства

$$A_2 - A_3 = 0, \quad A_3 - A_1 = 0, \quad A_1 - A_2 = 0$$

являются уравненіями биссектрисъ внутреннихъ угловъ, а равенства

$$A_2 + A_3 = 0, \quad A_3 + A_1 = 0, \quad A_1 + A_2 = 0$$

уравненіями биссектрисъ внѣшнихъ угловъ (§ 58, 5). При этомъ имѣютъ мѣсто тождества:

$$(A_2 - A_3) + (A_3 - A_1) + (A_1 - A_2) \equiv 0,$$
$$(A_2 - A_3) + (A_3 + A_1) - (A_1 + A_2) \equiv 0;$$

первое изъ нихъ показываетъ, что биссектрисы трехъ внутреннихъ угловъ пересѣкаются въ одной точкѣ, изъ второго же явствуетъ, что въ одной точкѣ пересѣкаются биссектрисы двухъ внѣшнихъ и третьяго внутренняго угловъ.

2. Если мы обозначимъ черезъ α_1, α_2, α_3 три угла нашего треугольника, то для каждой точки высоты, опущенной на сторону (23), какъ видно изъ фиг. 58, будетъ имѣть мѣсто равенство

$$A_2 : A_3 = \cos\alpha_3 : \cos\alpha_2,$$

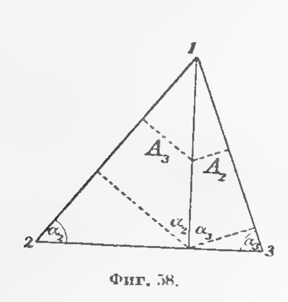
---

[8]) Какъ мы уже имѣли случай указать въ дополненіи I къ I-ой книгѣ II-го тома, этими немногими словами не только нельзя обосновать, но и нельзя даже достаточно выяснить, почему въ указанномъ случаѣ λ слѣдуетъ положить равнымъ ∞. Это выясняется больше, если мы замѣтимъ, что λ есть отношеніе синусовъ угловъ, которые соотвѣтствующій лучъ U образуетъ съ прямыми U_1 и U_2; это отношеніе стремится къ безконечности, когда лучъ U неограниченно приближается къ слiянію съ лучемъ U.

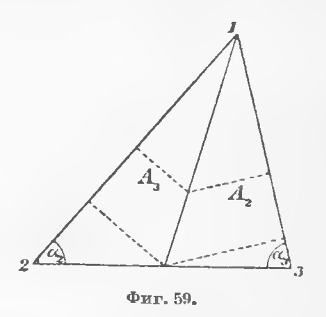
и поэтому уравненія трехъ высотъ имѣютъ видъ:

$$A_2 \cos\alpha_2 - A_3 \cos\alpha_3 = 0,$$
$$A_3 \cos\alpha_3 - A_1 \cos\alpha_1 = 0,$$
$$A_1 \cos\alpha_1 - A_2 \cos\alpha_2 = 0.$$

Если сложить ихъ лѣвыя части, то получится выраженіе, тождественно равное нулю; этимъ доказывается теорема, что три высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.



Фиг. 58.



Фиг. 59.

3. Для линій, соединяющихъ вершины угловъ съ серединами противоположныхъ сторонъ, мы столь же легко получимъ уравненія:

$$A_2 \sin\alpha_2 - A_3 \sin\alpha_3 = 0,$$
$$A_3 \sin\alpha_3 - A_1 \sin\alpha_1 = 0,$$
$$A_1 \sin\alpha_1 - A_2 \sin\alpha_2 = 0,$$

а изъ тождества

$$(A_2 \sin\alpha_2 - A_3 \sin\alpha_3) + (A_3 \sin\alpha_3 - A_1 \sin\alpha_1) + (A_1 \sin\alpha_1 - A_2 \sin\alpha_2) \equiv 0$$

снова вытекаетъ, что и эти три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

4. Теорема Дезарга. Пусть U_1, U_2, U_3 будутъ три прямыя пересѣкающіяся въ одной точкѣ. Если соотвѣтствующіе постоянные множители мы будемъ считать входящими уже въ выраженія U_1, U_2, U_3, то мы можемъ положить:

$$U_1 + U_2 + U_3 \equiv 0. \qquad (1)$$

Возьмемъ теперь треугольникъ, вершины котораго лежатъ на прямыхъ U_1, U_2, U_3, и допустимъ, что стороны этого треугольника имѣютъ уравненія: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$.

Если прямыя u_2, u_3 должны пересѣчься на прямой U_1, то (§ 59, 4, должны существовать численные множители m_1, n_1 такого свойства, что

$$U_1 \equiv m_1 u_2 - n_1 u_3;$$

подобнымъ же образомъ мы получимъ тождества:

$$U_2 \equiv m_2 u_3 - n_2 u_1,$$
$$U_3 \equiv m_3 u_1 - n_3 u_2.$$

Но, такъ какъ прямыя u_1, u_2, u_3 не пересѣкаются въ одной точкѣ, то изъ тождества (1) вытекаютъ равенства: $n_2 = m_3$, $n_3 = m_1$, $n_1 = m_3$ [9]); такимъ образомъ, если мы снова включимъ множителей m, n въ обозначенія u, то можно положить:

$$U_1 \equiv u_2 - u_3, \quad U_2 \equiv u_3 - u_1, \quad U_3 \equiv u_1 - u_2.$$

Если теперь прямыя v_1, v_2, v_3 образуютъ второй треугольникъ, вершины котораго, равнымъ образомъ, лежатъ на прямыхъ U_1, U_2, U_3, то получимъ тождества

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv u_2 - u_3 \equiv v_2 - v_3, \\ U_2 &\equiv u_3 - u_1 \equiv v_3 - v_1, \\ U_3 &\equiv u_1 - u_2 \equiv v_1 - v_2, \end{aligned} \tag{2}$$

а отсюда:

$$u_1 - v_1 \equiv u_2 - v_2 \equiv u_3 - v_3 \equiv V. \tag{3}$$

Такимъ образомъ, равенство $V = 0$ есть уравненіе прямой, на которой пересѣкаются три пары прямыхъ u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3 [10]); это и составляетъ содержаніе теоремы Дезарга, которую можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Если вершины двухъ треугольниковъ расположены такъ, что три прямыя, соединяющія соотвѣтствующія вершины, пересѣкаются въ одной точкѣ, то три точки пересѣченія соотвѣтствующихъ сторонъ лежатъ на одной прямой.

Справедлива и обратная теорема. Въ самомъ дѣлѣ, если соотвѣтствующія стороны двухъ треугольниковъ пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой, то уравненія сторонъ треугольниковъ можно

---

[9]) Въ самомъ дѣлѣ, тождество (1) принимаетъ видъ

$$(m_3 - n_2) u_1 + (m_1 - n_3) u_2 + (m_2 - n_1) u_3 \equiv 0.$$

Если бы всѣ три коэффиціента $(m_3 - n_2)$, $(m_1 - n_3)$, $(m_2 - n_1)$ были отличны отъ нуля, то это означало бы, что прямыя u_1, u_2, u_3 проходятъ черезъ одну точку; если бы два коэффиціента — скажемъ, первые два — были отличны отъ нуля, а третій былъ бы равенъ нулю, то это означало бы, что прямыя u_1 и u_2 совпадаютъ; если бы, наконецъ, отличенъ отъ нуля былъ только одинъ коэффиціентъ — скажемъ, первый — то u_1 должно было бы тождественно обращаться въ нуль.

[10]) Въ точкѣ пересѣченія прямыхъ u_1 и v_1 разность $u_1 - v_1 = V$ равна нулю, т. е. эта точка пересѣченія лежитъ на прямой $V = 0$ и т. д.

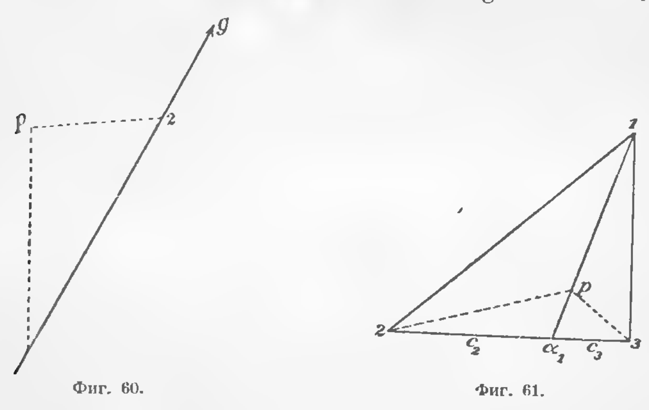
взять въ такой формѣ, чтобы выполнялись тождества (3), изъ которыхъ тогда обратно вытекаютъ тождества (2) и (1)).

§ 61. Теоремы Чевы и Менелая.

1. Кромѣ нормальнаго вида, мы будемъ разсматривать еще другой частный видъ уравненія прямой, который получается изъ выраженія для площади треугольника (§ 57, (3)). Черезъ (a_1, b_1), (a_2, b_2) обозначимъ координаты двухъ точекъ 1, 2 на прямой g. Направленіе отъ точки 1 къ точкѣ 2 примемъ за положительное направленіе этой прямой (фиг. 60). Пусть, далѣе, p есть произвольная точка плоскости съ координатами x, y. Тогда выраженіе

$$\varDelta = x(b_1 - b_2) - y(a_1 - a_2) + a_1 b_2 - a_2 b_1$$

представляетъ удвоенную площадь треугольника $(12p)$ съ положительнымъ или отрицательнымъ знакомъ въ зависимости отъ того, лежитъ ли точка p съ положительной стороны отъ прямой g, или съ отрицательной.



Фиг. 60. Фиг. 61.

Если точка p лежитъ на прямой g, то $\varDelta = 0$, и это равенство, такимъ образомъ, является уравненіемъ прямой.

2. Для того, чтобы дать примѣръ примѣненія изложеннаго, разсмотримъ треугольникъ 1 2 3, вершины котораго перенумерованы такъ,

[11]) Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что уравненія соотвѣтствующихъ сторонъ треугольника суть:

$$u_1' = 0,\ v_1' = 0;\ u_2' = 0,\ v_2' = 0;\ u_3' = 0,\ v_3' = 0.$$

Если прямая $V = 0$ проходитъ черезъ точку пересѣченія первыхъ двухъ прямыхъ, то, какъ было показано выше,

$$V \equiv m_1 u_1' - n_1 v_1'.$$

Если поэтому мы положимъ $m_1 u_1' \equiv u_1$ и $n_1 v_1' \equiv v_1$, то уравненія этой пары прямыхъ примутъ видъ $u_1 = 0$ и $v_1 = 0$, при чемъ $V \equiv u_1 - v_1$; такимъ же образомъ мы приведемъ уравненія остальныхъ прямыхъ къ такому виду, чтобы выполнялись тождества (3).

что внутреннія точки треугольника лежатъ съ положительной стороны отъ прямыхъ $\overline{23}$, $\overline{31}$, $\overline{12}$. Уравненія сторонъ этого треугольника могутъ быть представлены въ слѣдующей формѣ:

$$\Delta_1 \equiv x(b_2 - b_3) - y(a_2 - a_3) + a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0,$$
$$\Delta_2 \equiv x(b_3 - b_1) - y(a_3 - a_1) + a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0,$$
$$\Delta_3 \equiv x(b_1 - b_2) - y(a_1 - a_2) + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Если x, y суть координаты произвольной точки p, то Δ_1, Δ_2, Δ_3 представляютъ удвоенныя площади треугольниковъ $(23p)$, $(31p)$, $(12p)$ (съ соотвѣтствующими знаками; поэтому если точка p лежитъ внутри треугольника, то всѣ три величины будутъ имѣть положительныя значенія).

3. Раздѣлимъ теперь сторону $\overline{23}$ нашего треугольника двумя точками a_1, a_1' внутренне и внѣшне въ отношеніи, равномъ отношенію двухъ отрѣзковъ $c_2 : c_3$. Если при этомъ точка p лежитъ на линіи $1a_1$, то площади треугольниковъ $(1p2)$ и $(1p3)$ находятся въ отношеніи $c_2 : c_3$: въ самомъ дѣлѣ, они имѣютъ одно и то же основаніе $1p$, а высоты ихъ находятся въ отношеніи $c_2 : c_3$; отсюда заключаемъ, что для такой точки $\Delta_2 : \Delta_3 = c_2 : c_3$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ уравненіе прямой $(1a_1)$ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\Delta_2}{c_2} - \frac{\Delta_3}{c_3} = 0.$$

Аналогично этому для прямой $1a_1'$ получаемъ уравненіе:

$$\frac{\Delta_2}{c_2} + \frac{\Delta_3}{c_3} = 0.$$

Раздѣлимъ теперь точно такъ же сторону $\overline{31}$ точками a_2, a_2' въ отношеніи $c_3 : c_1$ и сторону $\overline{12}$ точками a_3, a_3' въ отношеніи $c_1 : c_2$; тогда мы получимъ слѣдующія уравненія шести прямыхъ, проходящихъ черезъ точки дѣленія и противоположныя вершины:

$$\frac{\Delta_2}{c_2} - \frac{\Delta_3}{c_3} = 0, \quad \frac{\Delta_3}{c_3} - \frac{\Delta_1}{c_1} = 0, \quad \frac{\Delta_1}{c_1} - \frac{\Delta_2}{c_2} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\Delta_2}{c_2} + \frac{\Delta_3}{c_3} = 0, \quad \frac{\Delta_3}{c_3} + \frac{\Delta_1}{c_1} = 0, \quad \frac{\Delta_1}{c_1} + \frac{\Delta_2}{c_2} = 0. \qquad (2)$$

Но имѣютъ мѣста тождества

$$\left(\frac{\Delta_2}{c_2} - \frac{\Delta_3}{c_3}\right) + \left(\frac{\Delta_3}{c_3} - \frac{\Delta_1}{c_1}\right) + \left(\frac{\Delta_1}{c_1} - \frac{\Delta_2}{c_2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\Delta_2}{c_2} - \frac{\Delta_3}{c_3}\right) + \left(\frac{\Delta_3}{c_3} + \frac{\Delta_1}{c_1}\right) - \left(\frac{\Delta_1}{c_1} + \frac{\Delta_2}{c_2}\right) = 0;$$

и еще два, имъ аналогичныя, откуда вытекаетъ предложенiе, что каждая изъ четырехъ системъ прямыхъ

$$\begin{array}{lll} 1a_1, & 2a_2, & 3a_3 \\ 1a_1, & 2a_2', & 3a_3' \\ 1a_1', & 2a_2, & 3a_3' \\ 1a_1', & 2a_2', & 3a_3 \end{array}$$

обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что составляющiя ее три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ (фиг. 62). Это и есть (обобщенная) теорема Чевы.

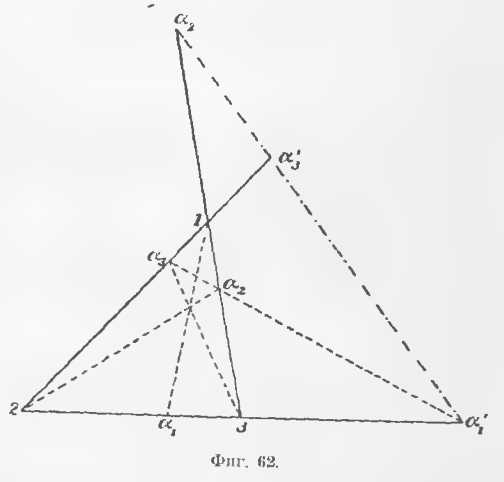
4. Разсмотримъ далѣе прямыя, выражаемыя слѣдующими уравненiями:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_1}{c_1} + \frac{\Delta_2}{c_2} + \frac{\Delta_3}{c_3} = 0, \\ -\frac{\Delta_1}{c_1} + \frac{\Delta_2}{c_2} + \frac{\Delta_3}{c_3} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Первое изъ этихъ уравненiй удовлетворяется, если величины

$$\Delta_1 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta_2}{c_2} + \frac{\Delta_3}{c_3}$$

одновременно обращаются въ нуль, т. е. для точки a_1'; точно такъ же убѣждаемся, что оно удовлетворяется и координатами точекъ a_2', a_3'; эти три точки лежатъ, такимъ образомъ, на одной прямой. Второе изъ уравненiй (3) удовлетворяется, равнымъ образомъ, координатами точки a_1' и. сверхъ того, координатами точекъ a_2, a_3, такъ что и точки a_1', a_2, a_3 лежатъ на одной прямой; аналогично этому находимъ, что точки a_1, a_2', a_3, равно какъ и точки a_1, a_2, a_3' — лежатъ на одной прямой (фиг. 62). Въ этомъ состоитъ теорема Менелая.



Фиг. 62.

Если въ треугольникѣ (123) произвольно взять точку a_1 на сторонѣ (23) и точку a_2 на сторонѣ (31), то можно однозначно построить точку a_3, соединивъ прямыми точки 1 и a_1. 2 и a_2, и, наконецъ, точку пересѣченiя этихъ прямыхъ съ точкой 3. Послѣдняя соединительная линiя пересѣкаетъ сторону (12) въ точкѣ a_3. Если затѣмъ соеди-

нить точки a_2 и a_3, то эта линія пересѣкаетъ продолженіе стороны (23) въ точкѣ a_1'; такъ же можно построить и остальныя точки. Точки 2, 3 и a_1, a_1' представляютъ собой гармоническія пары точекъ.

§ 62. Окружность.

1. Если a, b и x, y суть координаты двухъ точекъ, то, по теоремѣ Пиѳагора, квадратъ ихъ разстоянія (r) выражается такъ:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Такимъ образомъ, если a, b, c суть данныя величины, то всѣ точки x, y, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію

$$K \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0 \qquad (1)$$

лежатъ на окружности, описанной изъ точки a, b, какъ изъ центра, радіусомъ c. Поэтому равенство $K = 0$ называется уравненіемъ этой окружности въ томъ же смыслѣ, въ какомъ мы говорили объ уравненіи прямой. Равенство (1) мы называемъ нормальнымъ видомъ уравненія окружности. Общій видъ $L = 0$ мы получимъ, если умножимъ K на произвольный множитель, отличный отъ нуля.

Каждое уравненіе вида

$$m(x^2 + y^2) + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0, \qquad (2)$$

въ которомъ m, α, β, γ — данныя величины, есть уравненіе окружности. Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ

$$\alpha = -ma, \quad \beta = -mb, \quad \gamma = m(a^2 + b^2 - c^2),$$

то уравненіе (2) приметъ видъ (1). Координаты центра этой окружности будутъ $a = -\alpha/m$, $b = -\beta/m$, а радіусъ $c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - m\gamma}/m$.

Такимъ образомъ, для того, чтобы радіусъ выражался вещественнымъ числомъ, необходимо, чтобы было $m\gamma < \alpha^2 + \beta^2$. Если $m\gamma = \alpha^2 + \beta^2$, то $c = 0$, и существуетъ лишь одна точка, координаты которой удовлетворяютъ уравненію (2). Такія окружности, которыя сводятся къ одной точкѣ, называются точечными окружностями.

2. Если точка P съ координатами x, y не лежитъ на окружности K, то для этой точки выраженіе K не обращается въ нуль. Если мы обозначимъ разстояніе точки x, y отъ центра черезъ r, то

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

откуда

$$K = r^2 - c^2 = (r - c)(r + c). \qquad (3)$$

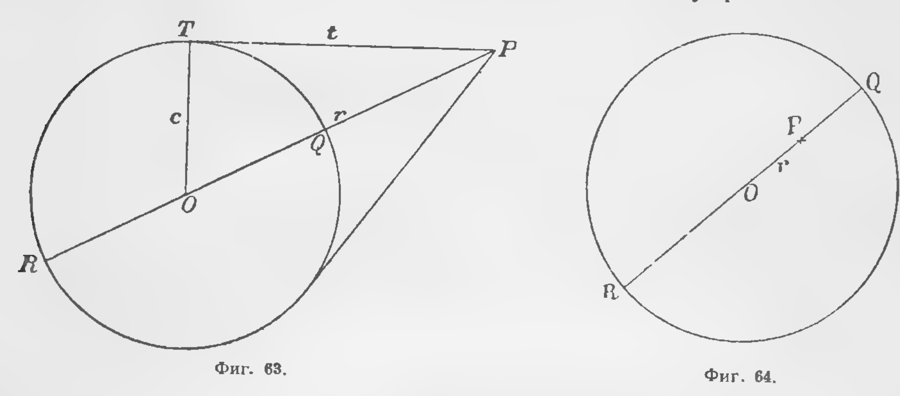
Эта величина называется степенью точки x, y относительно окружности K. Степень точки относительно окружности можно различно интерпретиро-

вать геометрически. Если точка P лежитъ внѣ круга, то $r^2 - c^2$ есть положительное число. Въ такомъ случаѣ можно провести изъ точки P двѣ равныя по длинѣ касательныя t къ окружности; тогда изъ прямоугольнаго треугольника OTP (фиг. 63) получится:

$$t^2 = r^2 - c^2.$$

Такимъ образомъ, степень точки P есть квадратъ касательной, которую можно провести изъ этой точки къ окружности.

Согласно второму изъ выраженій (3), степень равна также произведенію двухъ отрѣзковъ $PQ \cdot PR$, которые окружность отсѣкаетъ на прямой, соединяющей точку P съ центромъ. Это послѣднее свойство степени сохраняется и въ томъ случаѣ, когда P есть внутренняя точка.



Фиг. 63. Фиг. 64.

Въ этомъ случаѣ степень имѣетъ отрицательное значеніе, $PQ = c - r$, $PR = c + r$; такимъ образомъ, степень равна произведенію этихъ двухъ отрѣзковъ, взятому со знакомъ $-$, или квадрату наименьшей проходящей черезъ точку P полухорды, также взятому съ отрицательнымъ знакомъ.

3. Мы переходимъ теперь къ разысканію точекъ пересѣченія окружности K съ нѣкоторой прямой g. Пусть прямая g проходитъ черезъ точку P съ координатами x, y и пусть положительное ея направленіе составляетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ уголъ α. Обозначимъ, далѣе, черезъ ξ, η координаты перемѣнной точки π на прямой g и черезъ ϱ — разстояніе $P\pi$, которое будемъ считать положительнымъ, если точка π лежитъ отъ P съ положительной стороны прямой g, и отрицательнымъ въ противномъ случаѣ. Тогда (§ 57, 5)

$$\xi - x = \varrho \cos\alpha, \quad \eta - y = \varrho \sin\alpha.$$

Если теперь точка π лежитъ на окружности K, то координаты ξ, η должны удовлетворять уравненію

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 - c^2 = 0;$$

поэтому

$$(\varrho\cos\alpha + x - a)^2 + (\varrho\sin\alpha + y - b)^2 - c^2 = 0,$$

и, наконецъ, раскрывая скобки, получимъ:

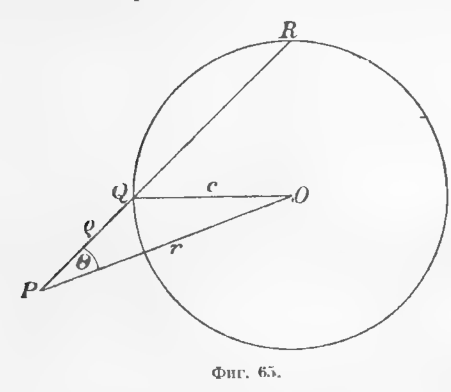
$$\varrho^2 + 2\varrho((x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha) + ((x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2) = 0. \quad (4)$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ квадратное уравненіе относительно ϱ; два корня этого уравненія обозначимъ черезъ ϱ_1, ϱ_2; на основаніи предложенія, даннаго въ § 46, 3, I тома

$$\varrho_1\varrho_2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2; \quad (5)$$

итакъ, произведеніе $\varrho_1\varrho_2$ не зависитъ отъ угла α и равно степени точки x, y относительно круга.

Это представляетъ собой обобщеніе указаннаго выше геометрическаго опредѣленія степени точки относительно окружности.



Фиг. 65.

Если мы обозначимъ черезъ r разстояніе точки P отъ центра O окружности, черезъ β уголъ, который направленіе $\overline{PO}$ составляетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ, и черезъ Θ уголъ $\alpha - \beta$, то

$$a - x = r\cos\beta,$$
$$b - y = r\sin\beta$$

и, слѣдовательно,

$$(x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha = -r\cos\Theta.$$

Уравненіе (4) принимаетъ поэтому слѣдующій видъ:

$$\varrho^2 - 2\varrho r\cos\Theta + r^2 - c^2 = 0, \quad (6)$$

къ которому можно также придти при помощи теоремы косинусовъ (§ 28, 4); легко видѣть, что ϱ_1 и ϱ_2 представляютъ собой отрѣзки PQ и PR.

Дискриминантъ этого уравненія (т. I, § 43 (2)) равенъ

$$4(r^2\cos^2\Theta - r^2 + c^2) = 4(c^2 - r^2\sin^2\Theta).$$

Онъ постоянно имѣетъ положительное значеніе, если $r^2 < c^2$, т. е. если точка P лежитъ внутри круга. Для внутренней точки оба корня ϱ_1, ϱ_2, такимъ образомъ, всегда оказываются вещественными. Если же P есть внѣшняя точка, то ϱ_1 и ϱ_2 только тогда могутъ быть вещественными, когда $\sin^2\Theta < c^2/r^2$. Значенія $\sin\Theta = \pm c/r$ отвѣчаютъ двумъ выходящимъ изъ точки P касательнымъ къ окружности.

§ 63. Точки пересѣченія двухъ окружностей.

1. Изъ геометріи извѣстно, что двѣ окружности могутъ пересѣкаться въ двухъ точкахъ. Если требуется опредѣлить аналитически точки пересѣченія двухъ окружностей K_1, K_2, то рѣчь идетъ объ опредѣленіи значеній неизвѣстныхъ x, y изъ двухъ уравненій $K_1=0$, $K_2=0$, которыя оба — второй степени. Но особенное свойство этихъ уравненій состоитъ въ томъ, что они могутъ быть сведены къ одному уравненію второй степени, такъ какъ члены второго измѣренія входятъ въ оба уравненія одинаковымъ образомъ, а именно, съ коэффиціентами, равными единицѣ. Вслѣдствіе этого разность K_1-K_2, которая также обращается въ нуль въ точкахъ пересѣченія окружностей K_1, K_2, есть выраженіе первой степени, такъ что уравненіе $K_1-K_2=0$ представляетъ собой уравненіе прямой; такимъ образомъ, вопросъ сводится къ разысканію точекъ пересѣченія нѣкоторой прямой съ одной изъ двухъ окружностей [12]). Мы выведемъ теперь квадратное уравненіе, къ которому приводится задача, непосредственно изъ данныхъ уравненій $K_1=0$, $K_2=0$.

2. Итакъ, пусть

$$K_1 \equiv (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-c_1^2,$$
$$K_2 \equiv (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-c_2^2.$$

Если мы положимъ

$$x-a_1=c_1\cos\vartheta,$$
$$y-b_1=c_1\sin\vartheta,$$

то для каждаго значенія ϑ выраженіе K_1 обращается въ нуль; здѣсь x, y суть координаты произвольной точки первой окружности, ϑ — уголъ, образуемый радіусомъ окружности, проходящимъ черезъ эту точку, съ осью x-овъ. Подставивъ эти выраженія въ уравненіе второй окружности, получимъ нѣкоторое уравненіе относительно ϑ, которое удовлетворяется въ томъ и только въ томъ случаѣ, если точка x, y лежитъ на обѣихъ окружностяхъ. Это уравненіе имѣетъ видъ

$$(a_1-a_2+c_1\cos\vartheta)^2+(b_1-b_2+c_1\sin\vartheta)^2-c_2^2=0.$$

Если обозначить черезъ e разстояніе между центрами обѣихъ окружностей, то $e^2=(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2$, и предыдущее уравненіе преобразуется такъ:

$$e^2-c_2^2+c_1^2+2c_1[(a_1-a_2)\cos\vartheta+(b_1-b_2)\sin\vartheta]=0.$$

Отсюда можно различными способами получить квадратное уравненіе, напримѣръ, относительно $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ или $\operatorname{tg}\vartheta$. Вычисленія будутъ наи-

[12]) Прямая $K_1-K_2=0$ проходитъ черезъ точки пересѣченія окружностей; чтобы разыскать послѣднія достаточно, слѣдовательно, разыскать точки пересѣченія одной изъ окружностей съ этой прямой.

болѣе простыми, если мы, согласно § 29 (11), положимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = t, \quad \cos\vartheta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin\vartheta = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Въ этомъ случаѣ можно x, y выразить раціонально черезъ t:

$$x = a_1 + c_1 \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b_1 + c_1 \frac{2t}{1 + t^2},$$

и, такимъ образомъ, величина t опредѣляетъ точку x, y однозначно.

Для t получается тогда квадратное уравненіе

$$(e^2 - c_2^2 + c_1^2)(1 + t^2) + 2c_1[(a_1 - a_2)(1 - t^2) + 2(b_1 - b_2)t] = 0,$$

или, если расположимъ лѣвую часть по степенямъ t:

$$t^2[e^2 - c_2^2 + c_1^2 - 2c_1(a_1 - a_2)] + 4c_1(b_1 - b_2)t +$$
$$+ (e^2 - c_2^2 + c_1^2) + 2c_1(a_1 - a_2) = 0,$$

которое можетъ быть разрѣшено по общему методу.

3. Составимъ еще дискриминантъ D этого уравненія;

$$D = 16c_1^2(b_1 - b_2)^2 - 4[(e^2 - c_2^2 + c_1^2)^2 - 4c_1^2(a_1 - a_2)^2]$$
$$= 16c_1^2e^2 - 4(e^2 - c_2^2 + c_1^2)^2;$$

онъ можетъ быть разложенъ на множители слѣдующимъ образомъ:

$$D = -4(e + c_1 + c_2)(e + c_1 - c_2)(e - c_1 + c_2)(e - c_1 - c_2).$$

Если мы примемъ, что $c_1 \geqq c_2$, то D будетъ имѣть положительное значеніе, коль скоро

$$c_1 - c_2 < e < c_1 + c_2;$$

въ этомъ и только въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, обѣ окружности будутъ имѣть вещественныя точки пересѣченія; этотъ результатъ ясенъ и геометрически.

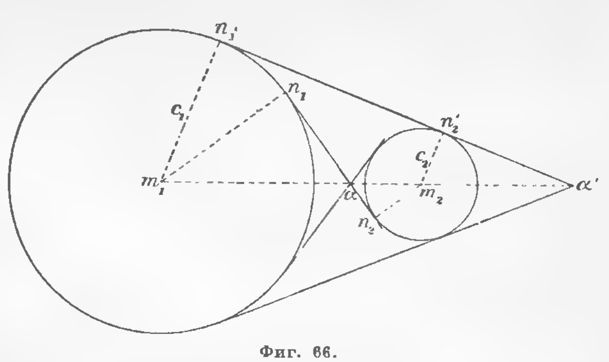
Если $e = c_1 + c_2$ или $e = c_1 - c_2$, то D обращается въ нуль; обѣ точки пересѣченія сливаются при этомъ въ одну точку касанія.

§ 64. Центры подобія и оси подобія.

1. Двѣ не пересѣкающіяся окружности K_1, K_2 имѣютъ четыре общихъ касательныхъ, изъ которыхъ двѣ мы называемъ внутренними, и двѣ внѣшними. Точки пересѣченія a, a' общихъ касательныхъ съ прямой, соединяющей центры m_1, m_2 (ее мы будемъ называть центральной линіей), дѣлитъ разстояніе между центрами внутренне и внѣшне въ отношеніи, равномъ отношенію радіусовъ, что вытекаетъ изъ подобія треугольниковъ m_1n_1a, m_2n_2a и $m_1n_1'a'$, $m_2n_2'a'$ (фиг. 66).

Точки a, a' называются центрами подобія обѣихъ окружностей, и именно, одна внутреннимъ, другая внѣшнимъ.

Эти точки a, a' существуютъ и въ томъ случаѣ, когда окруж пости пересѣкаются [13]); но при этомъ общія касательныя къ обѣимъ окружностямъ исходятъ лишь изъ внѣшняго центра подобія.



Фиг. 66.

Если одна изъ окружностей лежитъ внутри другой, то и тогда также можно найти два центра подобія, но оба они лежатъ во внутренней окружности, и ни черезъ одинъ изъ нихъ не проходятъ касательныя къ окружностямъ.

Во всѣхъ случаяхъ эти точки можно найти, если провести въ обѣихъ окружностяхъ параллельные діаметры и соединить попарно ихъ конечныя точки.

2. Разсмотримъ теперь систему трехъ окружностей K_1, K_2, K_3 съ радіусами c_1, c_2, c_3, съ центрами m_1, m_2, m_3, имѣющими, соотвѣтственно, координаты $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ и не лежащими на одной прямой; для каждой пары этихъ окружностей существуютъ центры подобія, которые мы обозначимъ, соотвѣтственно, черезъ $\alpha_1 \alpha_1'$, $\alpha_2 \alpha_2'$, $\alpha_3 \alpha_3'$; они дѣлятъ стороны треугольника $m_1 m_2 m_3$ внутреннимъ и внѣшнимъ образомъ въ отношеніи $c_2 : c_3$, $c_3 : c_1$, $c_1 : c_2$, и мы можемъ примѣнить къ этому треугольнику теорему Менелая (§ 61, 4). Въ силу послѣдней

точки $\alpha_1' \alpha_2' \alpha_3'$ лежатъ на одной прямой A',
„ $\alpha_1' \alpha_2\ \alpha_3$ „ „ „ „ A_1,
„ $\alpha_1\ \alpha_2' \alpha_3$ „ „ „ „ A_2,
„ $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3'$ „ „ „ „ A_3;

эти четыре прямыя называются осями подобія трехъ окружностей и, въ частности, A' внѣшней, а остальныя три внутренними осями подобія.

Если мы, какъ въ § 61, 2., положимъ:

$$\Delta_1 \equiv x(b_2 - b_3) - y(a_2 - a_3) + a_2 b_3 - a_3 b_2,$$
$$\Delta_2 \equiv x(b_3 - b_1) - y(a_3 - a_1) + a_3 b_1 - a_1 b_3,$$
$$\Delta_3 \equiv x(b_1 - b_2) - y(a_1 - a_2) + a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

[13]) Т. е. существуютъ точки, дѣлящія разстояніе между центрами внутренне и внѣшне въ отношеніи радіусовъ.

то уравненіе внѣшней оси подобія можно будетъ представить въ видѣ [14]):

$$\frac{\Delta_1}{c_1} + \frac{\Delta_2}{c_2} + \frac{\Delta_3}{c_3} = 0;$$

уравненія же трехъ внутреннихъ осей получатся изъ него послѣдовательной замѣной c_1, c_2, c_3 черезъ $-c_1$, $-c_2$, $-c_3$.

§ 65. Радикальныя оси и радикальный центръ.

1. Пусть

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - c_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - c_2^2 = 0$$

будутъ уравненіями двухъ неконцентрическихъ окружностей въ нормальномъ видѣ. Тогда разность

$$K_1 - K_2 \equiv 2x(a_2 - a_1) + 2y(b_2 - b_1) + a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_1^2 + c_2^2 \qquad (1)$$

представляетъ собой выраженіе первой степени относительно x и y, и уравненіе

$$K_1 - K_2 = 0 \qquad (2)$$

выражаетъ, такимъ образомъ, прямую линію; эту прямую мы будемъ называть **радикальной осью** этихъ двухъ окружностей. Она представляетъ собой **геометрическое мѣсто точекъ плоскости, имѣющихъ одну и ту же степень относительно обѣихъ окружностей.**

Равенство (2) выполняется, если величины K_1 и K_2 обѣ обращаются въ нуль.

Такимъ образомъ, если окружности пересѣкаются, то ихъ радикальная ось проходитъ черезъ точки пересѣченія. Поэтому эта линія называется также **общей хордой обѣихъ окружностей.** Это выраженіе, въ точномъ смыслѣ слова, примѣнимо лишь въ томъ случаѣ, если окружности пересѣкаются въ двухъ точкахъ. Если же онѣ касаются другъ друга, то радикальная ось является ихъ **общей касательной.**

Радикальная ось перпендикулярна къ центральной линіи. Въ самомъ дѣлѣ, если мы обозначимъ черезъ α уголъ, образуемый нормалью къ радикальной оси и осью x-овъ, то изъ соотношенія (1), на основаніи § 58, (7), получимъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1};$$

такимъ образомъ, эта нормаль имѣетъ то же направленіе, что и центральная линія.

[14]) См. § 61, 4.

2. Относительно взаимнаго положенія двухъ окружностей мы будемъ различать три случая сообразно съ тѣмъ, пересѣкаются ли эти окружности, или меньшая изъ нихъ лежитъ внутри большей, или, наконецъ, обѣ окружности расположены одна внѣ другой.

Если черезъ e мы обозначимъ разстояніе между обоими центрами и допустимъ, что $c_1 > c_2$, то упомянутые три случая характеризуются, соотвѣтственно, слѣдующими соотношеніями:

1) $0 < c_1 - c_2 < e < c_1 + c_2,$

2) $e < c_1 - c_2,$

3) $e > c_1 + c_2.$

Если черезъ ξ обозначить разстояніе нѣкоторой точки центральной линіи отъ центра m_1 первой окружности, считая это разстояніе положительнымъ въ направленіи отъ m_1 къ m_2, то для точки пересѣченія радикальной оси съ центральной линіей получится соотношеніе

$$\xi^2 - c_1^2 = (\xi - e)^2 - c_2^2,$$

откуда

$$2\xi e = e^2 + c_1^2 - c_2^2.$$

Изъ этого соотношенія мы прежде всего усматриваемъ, что ξ постоянно имѣетъ положительное значеніе. Такимъ образомъ, радикальная ось, если смотрѣть изъ центра большей окружности, расположена всегда со стороны центра меньшей окружности.

Въ случаѣ 1) изъ соотношенія

$$2\xi = \frac{e^2 + c_1^2 - c_2^2}{e} = e + \frac{(c_1 - c_2)(c_1 + c_2)}{e}, \qquad (3)$$

замѣняя въ немъ справа сумму $c_1 + c_2$ *меньшимъ числомъ* e, а *затѣмъ* разность $c_1 - c_2$ большимъ числомъ e, получимъ:

$$e + c_1 - c_2 < 2\xi < e + c_1 + c_2;$$

или, принимая во вниманіе соотношеніе (1):

$$e < e + c_1 - c_2 < 2\xi < e + c_1 + c_2 < 2e.$$

Такимъ образомъ, ξ заключается между $\frac{1}{2}e$ и e, и радикальная ось проходитъ между центрами обѣихъ окружностей, но ближе къ центру меньшей изъ нихъ.

Въ случаѣ 2) $c_2 < c_1 - e$ и, слѣдовательно,

$$2\xi = e + \frac{c_1^2 - c_2^2}{e} > e + \frac{c_1^2 - (c_1 - e)^2}{e} = 2c_1,$$

такъ что радикальная ось лежитъ внѣ обѣихъ окружностей, со стороны меньшей изъ нихъ.

Въ случаѣ 3), замѣнивъ въ соотношеніи (3) $c_1 + c_2$ бóльшимъ числомъ c, получимъ:

$$2\xi < c + c_1 - c_2,$$

и, слѣдовательно,

$$\xi - c_1 < c - \xi - c_2.$$

Такимъ образомъ, радикальная ось въ этомъ случаѣ проходитъ между обѣими окружностями, и притомъ ближе къ большей изъ нихъ, чѣмъ къ меньшей.

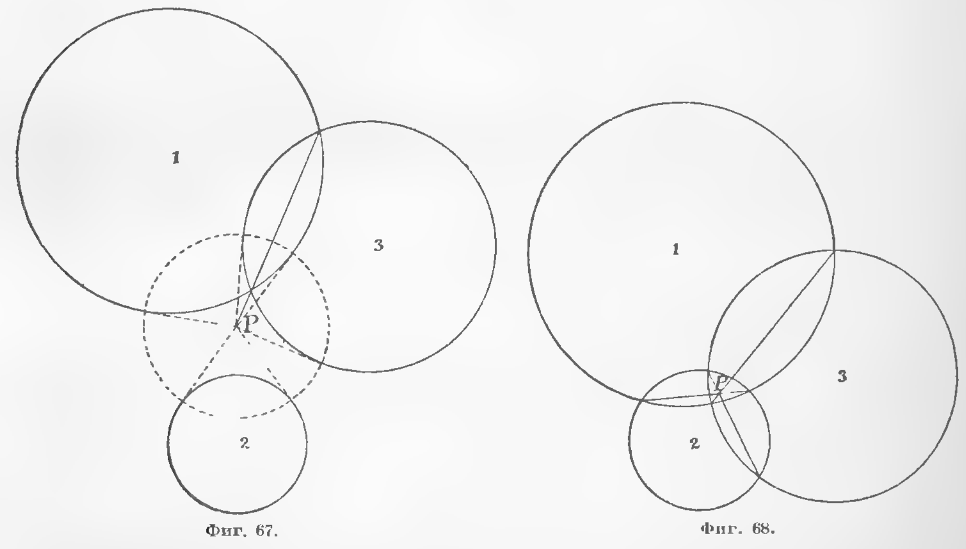
3. Обратимся теперь къ системѣ трехъ окружностей K_1, K_2, K_3, центры которыхъ не лежатъ на одной прямой. Обозначимъ черезъ p_1, p_2, p_3 радикальныя оси каждой пары окружностей этой системы; тогда равенства

$$K_2 - K_3 = 0, \quad K_3 - K_1 = 0, \quad K_1 - K_2 = 0$$

будутъ служить уравненіями этихъ осей. Но, такъ какъ

$$(K_2 - K_3) + (K_3 - K_1) + (K_1 - K_2) \equiv 0,$$

то, очевидно, всѣ три оси пересѣкаются въ одной точкѣ; эта точка называется радикальнымъ центромъ трехъ окружностей. Мы обозначимъ



Фиг. 67. Фиг. 68.

ее черезъ P. Эта точка имѣетъ одну и ту же степень въ отношеніи всѣхъ трехъ окружностей, и притомъ является единственной точкой, обладающей этимъ свойствомъ.

Если радикальный центръ лежитъ внѣ одной изъ окружностей, то онъ лежитъ также и внѣ остальныхъ двухъ окружностей, и изъ него въ этомъ случаѣ могутъ быть проведены къ тремъ окружностямъ шесть касательныхъ, всѣ одной длины.

Такимъ образомъ, шесть точекъ касанія лежатъ на нѣкоторой окружности, имѣющей центръ въ точкѣ P. Эта окружность

называется ортогональной окружностью данныхъ трехъ окружностей, такъ какъ въ точкахъ ея пересѣченія съ каждой изъ данныхъ окружностей касательныя къ обѣимъ окружностямъ взаимно перпендикулярны (фиг. 67).

Если же радикальный центръ лежитъ внутри одной изъ трехъ окружностей, то онъ лежитъ также внутри двухъ остальныхъ, такъ какъ онъ имѣетъ въ этомъ случаѣ отрицательную степень относительно всѣхъ трехъ окружностей; ортогональной окружности въ этомъ случаѣ не существуетъ (фиг. 68).

Послѣдній случай, когда ортогональной окружности не существуетъ, т. е. когда степень точки P въ отношеніи всѣхъ трехъ окружностей есть отрицательное число, можетъ имѣть мѣсто лишь тогда, если любыя двѣ изъ данныхъ окружностей пересѣкаются въ двухъ точкахъ и притомъ такъ, что третья окружность раздѣляетъ эти двѣ точки пересѣченія.

Въ самомъ дѣлѣ, если двѣ окружности, — напримѣръ, K_1, K_2 - не пересѣкаются, то степень любой точки радикальной оси p_3, а, слѣдовательно, и точки P имѣетъ положительное значеніе. Если же эти двѣ окружности пересѣкаются въ двухъ точкахъ α, β, то только для точекъ отрѣзка $\overline{\alpha\beta}$ степень будетъ отрицательной; а потому, если степень точки P также имѣетъ отрицательное значеніе, то послѣдняя необходимо лежитъ на отрѣзкѣ $\overline{\alpha\beta}$.

Если мы будемъ перемѣщать точку π вдоль прямой p_3, то разность $K_3 - K_1$ обратится въ нуль одинъ разъ, а именно въ точкѣ P, и при переходѣ черезъ P эта разность мѣняетъ знакъ. Такимъ образомъ, если точка P лежитъ между точками α и β, то разность $K_3 - K_1$, а, слѣдовательно, и само выраженіе K_3 — должны имѣть въ точкахъ α, β различные знаки [15]), т. е. изъ этихъ точекъ одна должна лежать внутри, а другая внѣ окружности K_3.

§ 66. Эллипсъ.

1. Окружность опредѣляется, какъ совокупность (геометрическое мѣсто) всѣхъ точекъ, равноотстоящихъ отъ нѣкоторой постоянной точки, называемой центромъ. Мы обобщимъ теперь это опредѣленіе, замѣнивъ въ немъ одну постоянную точку двумя, которыя мы будемъ называть **фокусами**, и опредѣлимъ

эллипсъ, какъ геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ сумма разстояній отъ двухъ фокусовъ есть постоянная величина [16]).

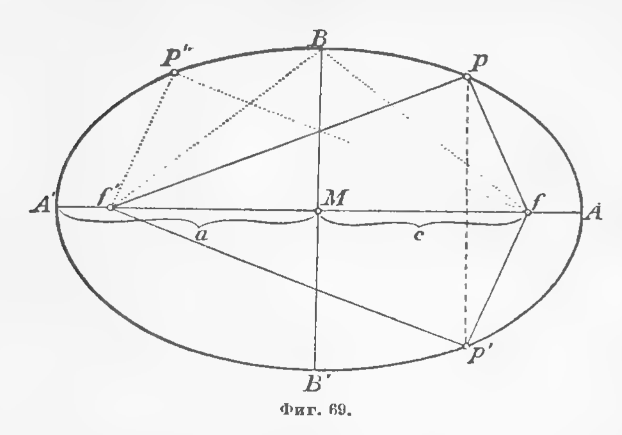
---

[15]) Въ точкахъ α и β $K_1 = 0$, а потому, если разность $K_3 - K_1$ имѣетъ въ этихъ точкахъ противные знаки, то и K_3 имѣетъ въ этихъ точкахъ различные знаки.

[16]) Если фокусы совпадаютъ, то эта сумма представляетъ собой двойное разстояніе точки кривой отъ двойного фокуса; это разстояніе будетъ имѣть

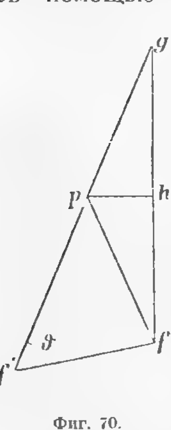
2. Изъ этого опредѣленія прежде всего можно вывести способъ вычерчиванія эллипса, который почти столь же простъ, какъ и способъ вычерчиванія окружности съ помощью циркуля (фиг. 69).

Въ обоихъ фокусахъ f и f' укрѣпляютъ два штифта. Затѣмъ связываютъ нитку въ замкнутое кольцо, длина котораго $2a+2c$ больше, чѣмъ удвоенное разстояніе $4c$ между обоими фокусами, и кладутъ эту петлю такъ, чтобы она охватила оба штифта въ точкахъ f и f'. Далѣе, съ помощью пишущаго штифта p вытягиваютъ эту петлю въ треугольникъ $(ff'p)$ и ведутъ пишущій штифтъ по плоскости чертежа, при чемъ нитку все время держатъ натянутой. Штифтъ p тогда опишетъ эллипсъ, такъ какъ мы предполагаемъ нитку нерастяжимой, потому периметръ треугольника $(ff'p)$ и, слѣдовательно, сумма сторонъ $fp+f'p$ сохраняютъ одну и ту же величину. Кривая тѣмъ болѣе похожа на окружность, чѣмъ ближе, при той же длинѣ нити, лежатъ другъ къ другу фокусы.



Фиг. 69.

3. Если мы хотимъ вмѣсто указаннаго способа черченія эллипса съ помощью нити имѣть точное построеніе, то нужно поступить слѣдующимъ образомъ (фиг. 70): изъ одного фокуса, напримѣръ, изъ точки f', проводимъ въ произвольномъ направленіи лучъ $f'g$ и на немъ откладываемъ отрѣзокъ $2a$. Затѣмъ соединяемъ точки g и f и полученный отрѣзокъ дѣлимъ пополамъ; пусть серединой его будетъ точка h. Перпендикуляръ hp, возставленный къ отрѣзку fg въ его серединѣ, пересѣкаетъ отрѣзокъ $f'g$ въ нѣкоторой точкѣ p, принадлежащей эллипсу, такъ какъ треугольникъ (fpg) равнобедренный и, слѣдовательно, $f'p+fp=f'g=2a$. Такимъ образомъ при данныхъ фокусахъ и данной длинѣ $2a$ на каждомъ лучѣ, исходящемъ изъ f', можно найти одну и только одну точку эллипса; длина отрѣзка $f'p$ всегда меньше $2a$. Кривая поэтому замкнута и заключена цѣликомъ внутри окружности, описанной изъ точки f' радіусомъ $2a$.



Фиг. 70.

постоянное значеніе, и въ этомъ смыслѣ предыдущее опредѣленіе представляетъ обобщеніе опредѣленія окружности.

4. Нѣкоторыя другія свойства эллипса вытекаютъ непосредственно изъ опредѣленія.

Если точка p принадлежитъ эллипсу, то и точка p', которая представляетъ собой отраженіе точки p отъ линіи AA', соединяющей фокусы, также лежитъ на кривой, ибо

$$f'p + fp = f'p' + fp';$$

равнымъ образомъ лежитъ на кривой и точка p'', которая получается отраженіемъ точки p отъ перпендикуляра BB', возставленнаго къ отрѣзку ff' въ его серединѣ. Обѣ взаимно перпендикулярныя линіи AA' и BB' дѣлятъ, такимъ образомъ, эллипсъ на четыре симметричныя и конгруэнтныя части (фиг. 70).

Точка M, лежащая по серединѣ между f и f', называется центромъ эллипса. Линіи $\overline{AA'}$ и BB' называются главными осями, а точки A, A', B, B', въ которыхъ оси пересѣкаютъ кривую, вершинами эллипса. Отрѣзокъ $\overline{AA'}$ имѣетъ длину $2a$; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ A есть точка кривой, то $f'A + \overline{fA} = 2a$; вслѣдствіе же симметріи $fA = \overline{f'A'}$. Слѣдовательно,

$$f'A + f'A' = AA' = 2a.$$

Отрѣзокъ AA' называется большой осью эллипса.

Отрѣзокъ $\overline{BB'}$ носитъ названіе малой оси и обозначается черезъ $2b$. Длины $MA = a$, $MB = b$ называются также большой и малой полуосями.

Далѣе, отрѣзокъ $Mf = Mf' = c$ называется линейнымъ эксцентриситетомъ эллипса. Отношеніе же c къ a, т. е. дробь

$$e = \frac{c}{a}$$

называютъ численнымъ эксцентриситетомъ. Такимъ образомъ, въ то время какъ линейный эксцентриситетъ есть отрѣзокъ, длина котораго можетъ быть выражена въ какой-нибудь единицѣ длины, численный эксцентриситетъ является просто числомъ и притомъ правильной дробью. Чѣмъ меньше эта дробь, тѣмъ ближе по виду эллипсъ подходитъ къ окружности. Окружность есть эллипсъ съ эксцентриситетомъ, равнымъ нулю. Такъ какъ $f'B + fB = 2a$, то $fB = a$, и изъ прямоугольнаго треугольника BMf, согласно Пиѳагоровой теоремѣ, получается соотношеніе:

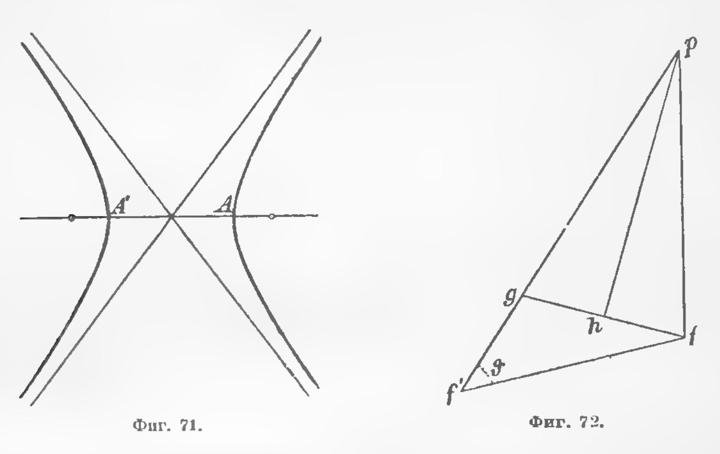
$$a^2 = b^2 + c^2. \qquad (1)$$

5. Лучъ, выходящій изъ центра, встрѣчаетъ эллипсъ постоянно въ одной и только въ одной точкѣ; дѣйствительно, если мы будемъ перемѣнную точку P двигать по этому лучу, начиная отъ центра, постоянно въ одномъ и томъ же направленіи, то сумма $Pf + P\overline{f'}$, начиная со значенія $2c$, будетъ безпредѣльно возрастать и одинъ разъ приметъ каждое значеніе, большее $2c$, въ томъ числѣ и значеніе $2a$.

Если продолжать лучъ въ обратную сторону, то онъ снова встрѣтитъ кривую на такомъ же разстояніи отъ центра, но съ другой стороны. Отрѣзокъ, лежащій между этими двумя точками пересѣченія, называется діаметромъ эллипса.

§ 67. Гипербола.

1. Построеніе, которое было нами указано въ п. 3 предыдущаго параграфа, можетъ быть выполнено также и тогда, когда a меньше c. Но въ этомъ случаѣ оно приводитъ къ другой кривой, точки которой p удовлетворяють тому условію, что разность $\overline{f'p} - \overline{fp}$ равняется постоянной величинѣ $2a$. Эта кривая называется гиперболой (фиг. 71).



Фиг. 71. Фиг. 72.

Здѣсь при нѣкоторомъ опредѣленномъ направленіи луча $\overline{f'g}$ (фиг. 72) лучи $\overline{fg}$ и $\overline{f'g}$ могутъ оказаться взаимно перпендикулярными [17]); тогда лучи $\overline{f'g}$ и $\overline{hp}$ становятся параллельными, и точка p отодвигается на безконечное разстояніе.

Если обозначимъ уголъ $gf'f$ черезъ ϑ, то упомянутый случай имѣетъ мѣсто тогда, когда $\cos\vartheta = a/c$. Опредѣляемое этимъ соотношеніемъ направленіе называется асимптотическимъ направленіемъ. Если уголъ ϑ взять еще больше, то линія $\overline{hp}$ уже не встрѣтитъ луча $\overline{f'g}$, но пересѣчетъ въ нѣкоторой точкѣ p' его продолженіе въ обратную сторону; для этой точки $\overline{f'p} - \overline{f'p'} = 2a$. Такимъ образомъ получается вторая вѣтвь, представляющая отраженіе первой и составляющая вмѣстѣ съ первой полную гиперболу (фиг. 71). То обстоятельство, что обѣ вѣтви гиперболы другъ съ другомъ связаны, было извѣстно уже Аполлонію.

---

[17]) Какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, черезъ g здѣсь обозначена точка, отстоящая отъ f' на разстояніе $\overline{f'g} = 2a$.

Точки A, A', въ которыхъ кривую пересѣкаетъ линія $\overline{ff'}$, называются **вершинами** гиперболы. Разстояніе между ними $\overline{AA'}$, равное $2a$, называется главной осью гиперболы. Средняя точка M оси называется **центромъ гиперболы**, а перпендикуляръ къ оси, возставленный въ центрѣ и не встрѣчающій вовсе кривой, называется **мнимою осью**.

§ 68. Уравненіе эллипса и гиперболы.

1. Для того, чтобы выразить эллипсъ по методу аналитической геометріи нѣкоторымъ уравненіемъ, намъ нужно лишь выразить формулами указанное построеніе.

Мы выбираемъ систему координатъ такъ, чтобы началомъ служилъ фокусъ f', а положительное направленіе оси x-овъ совпадало съ направленіемъ отъ точки f' къ точкѣ f. При этомъ положительнымъ направленіемъ оси y-овъ, перпендикулярной къ оси x-овъ, мы будемъ считать ея направленіе снизу вверхъ.

Обозначимъ черезъ x, y координаты точки p и черезъ r, r' разстоянія $\overline{pf'}$, pf. Тогда

$$r^2 = x^2 + y^2; \tag{1}$$

если же p есть точка нашего эллипса, то

$$r + r' = 2a. \tag{2}$$

Если теперь черезъ ϑ обозначить уголъ, составляемый лучомъ $\overline{f'p}$ съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ, то

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \tag{3}$$

откуда, согласно теоремѣ косинусовъ (§ 28, 4),

$$r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\vartheta. \tag{4}$$

Въ силу соотношенія (2),

$$r'^2 = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

и, слѣдовательно, согласно равенству (4),

$$r(a - c\cos\vartheta) = a^2 - c^2; \tag{5}$$

такъ какъ (§ 66, (1)) $a^2 - c^2 = b^2$, то

$$r = \frac{b^2}{a - c\cos\vartheta}.$$

Это и есть **уравненіе эллипса въ полярныхъ координатахъ**.

Оно можетъ быть еще упрощено, если положимъ $b^2 : a = p$, $c : a = e$; тогда получимъ:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos\vartheta}. \tag{6}$$

Число e мы уже выше назвали численнымъ эксцентриситетомъ. Отрѣзокъ $2p$ носитъ названіе параметра эллипса. Число p есть то значеніе, которое r принимаетъ для $\vartheta = \pi/2$ ($\cos\vartheta = 0$), и, слѣдовательно, $2p$ есть длина хорды эллипса, перпендикулярной въ точкѣ f' (или f) къ большой оси.

Такъ какъ эксцентриситетъ e всегда есть правильная дробь, то число $1 - e\cos\vartheta$ всегда имѣетъ положительное значеніе. Если $e = 0$, то, согласно уравненію (6), $r = p$, т. е. r становится постояннымъ, и кривая превращается въ окружность.

2. Для того, чтобы получить уравненіе эллипса въ прямоугольныхъ координатахъ, мы прежде всего изъ соотношеній (5) и (3) выведемъ равенство:

$$ar = b^2 + cx;$$

возводя обѣ части его въ квадратъ и принимая во вниманіе соотношеніе (1), получимъ:

$$a^2(x^2 + y^2) = b^4 + 2cb^2x + c^2x^2,$$

или

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2cb^2x = b^4.$$

Вмѣсто этого мы можемъ также написать:

$$b^2(x - c)^2 + a^2y^2 = b^4 + b^2c^2,$$

или, такъ какъ $b^2 + c^2 = a^2$,

$$b^2(x - c)^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{7}$$

Если мы перейдемъ къ другой системѣ координатъ x_1, y_1, - именно, сохранимъ то же направленіе осей эллипса, а начало перенесемъ въ центръ эллипса, то будетъ $x_1 = x - c$, $y_1 = y$; уравненіе эллипса, отнесенное къ новой системѣ координатъ, мы получимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

или же

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

3. Переходя къ гиперболѣ, мы замѣчаемъ, что двѣ ея вѣтви подчинены различнымъ условіямъ, именно, для той изъ нихъ, которая

огибаетъ фокусъ f' (мы будемъ ее называть первой), имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$r' = r + 2a, \tag{9}$$

для другой —

$$r' = r - 2a. \tag{10}$$

Если мы въ уравненіи (4), согласно соотношенію (9), положимъ

$$r'^2 = r^2 + 4ar + 4a^2,$$

то для первой вѣтви получимъ:

$$r(a + c\cos\vartheta) = c^2 - a^2; \tag{11}$$

и если же въ послѣднемъ равенствѣ положимъ:

$$c^2 - a^2 = b^2, \quad c = ea, \quad \frac{b^2}{c} = p,$$

то получимъ:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}. \tag{12}$$

Это уравненіе построено совершенно аналогично уравненію (6). Можно его представить даже въ такой же точно формѣ, если замѣнить ϑ черезъ $\pi - \vartheta$. Число e, которое въ этомъ случаѣ больше единицы, по прежнему, называется численнымъ эксцентриситетомъ. Параметръ p и здѣсь также представляетъ собой длину хорды, перпендикулярной къ главной оси въ фокусѣ.

Для второй вѣтви, огибающей точку f, получимъ, полагая

$$r'^2 = r^2 - 4ar + 4a^2,$$

уравненіе:

$$r(c\cos\vartheta - a) = c^2 - a^2, \tag{13}$$

или

$$r = \frac{p}{e\cos\vartheta - 1}. \tag{14}$$

Такимъ образомъ, r обращается въ безконечность, если

$$\cos\vartheta = \frac{1}{e} = \frac{a}{c},$$

$$\sin\vartheta = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{b}{a};$$

уголъ, удовлетворяющій этимъ соотношеніямъ, опредѣляетъ асимптотическое направленіе. Асимптотическое направленіе для первой вѣтви получается (согласно равенству (12)), если положить $\cos\vartheta = -1 : e$.

4. Если, согласно равенству (11), для первой вѣтви положимъ

$$ar = b^2 - cx,$$

а для второй, согласно равенству (13),

$$-ar = b^2 - cx,$$

то, возвышая въ квадратъ, получимъ для обѣихъ вѣтвей одно и то же уравненіе:

$$a^2(x^2 + y^2) = b^4 - 2cb^2x + c^2x^2;$$

откуда, замѣщая $c^2 - a^2$ черезъ b^2 и b^4 черезъ $b^2c^2 - a^2b^2$, найдемъ:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2cb^2x + b^2c^2 = a^2b^2,$$

или, наконецъ,

$$b^2(x - c)^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Если положимъ теперь $x - c = x_1$, $y = y_1$, то получимъ уравненіе гиперболы, отнесенное къ главнымъ осямъ, какъ осямъ координатъ, въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \tag{15}$$

Это уравненіе имѣетъ мѣсто для обѣихъ вѣтвей гиперболы; безъ помощи радикаловъ невозможно найти уравненіе, отнесенное къ прямоугольной системѣ координатъ, которое выражало бы лишь одну изъ двухъ вѣтвей. Такимъ образомъ, и въ аналитической геометріи обѣ вѣтви также связаны другъ съ другомъ, какъ части одной кривой.

§ 69. Парабола.

1. Если r и ϑ суть полярныя координаты нѣкоторой перемѣнной точки (§ 57, 4), то уравненіями вида

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta} \tag{1}$$

выражаются какъ эллипсъ, такъ и гипербола. Для того, чтобы получить въ этомъ видѣ уравненіе эллипса (§ 68, (6)), достаточно лишь замѣнить ϑ черезъ $\pi - \vartheta$, т. е. повернуть всю фигуру вокругъ оси y-овъ. Полюсомъ системы координатъ служитъ одинъ изъ фокусовъ; e есть положительное число, которое въ случаѣ эллипса меньше единицы. Если придать параметру p постоянное значеніе и представить себѣ измѣняющимся число e, то получится цѣлый рядъ кривыхъ, проходящихъ черезъ двѣ постоянныя точки $r' = p$, $\vartheta = \pm\pi/2$; между этими кривыми будутъ какъ эллипсы, такъ и гиперболы. Значенію $e = 0$ отвѣчаетъ кругъ радіуса p (фиг. 73).

2. Разсмотримъ теперь, какое значеніе имѣетъ это уравненіе при $e = 1$.

Въ этомъ случаѣ мы получаемъ кривую, находящуюся между эллипсомъ и гиперболой, и носящую названіе параболы (жирно начерченная кривая на фиг. 73).

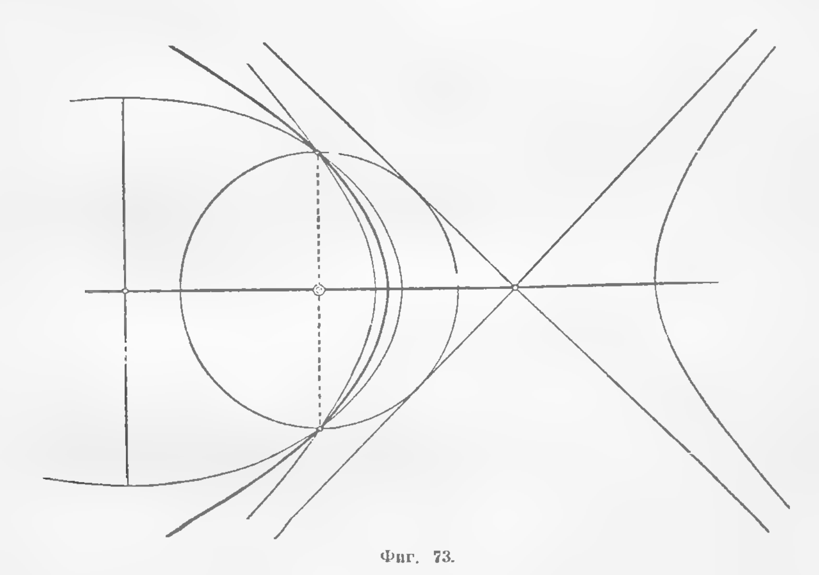
При $e = 1$ уравненіе даетъ:

$$r(1 + \cos\vartheta) = p;$$

положивъ здѣсь $r\cos\vartheta = x$, получимъ:

$$r = p \quad x. \tag{1}$$

Это уравненіе прежде всего даетъ возможность указать способъ образованія параболы. Отложимъ на положительной части оси x-овъ



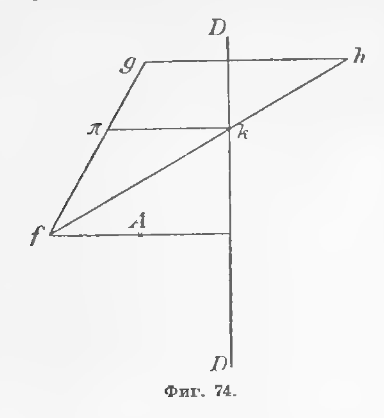
Фиг. 73.

отрѣзокъ p и вь концѣ его возставимъ перпендикуляръ D (фиг. 74). Эта линія называется направляющей линіей или директрисой параболы.

Если взять произвольную точку π съ абсциссой x, то величина $p - x$ выражаетъ разстояніе этой точки отъ директрисы; а такъ какъ r означаетъ разстояніе этой точки отъ фокуса f, то изъ уравненія (1) вытекаетъ, что парабола есть геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ фокуса и отъ директрисы.

3. Для того, чтобы построить точку параболы, лежащую на произвольно заданномъ лучѣ r, беремъ на этомъ лучѣ произвольную точку g, проводимъ черезъ нее прямую gh, параллельную оси x-овъ, откладываемъ отрѣзокь $gh = \overline{fg}$, такь что полученный треугольникъ fgh будетъ равно-

бедреннымъ. Прямая hf пересѣкаетъ директрису D въ нѣкоторой точкѣ k, черезъ которую также проводимъ прямую, параллельную оси x-овъ. Эта послѣдняя пересѣкаетъ прямую fg въ нѣкоторой точкѣ π, принадлежащей кривой; въ самомъ дѣлѣ, треугольникъ $f\pi k$ подобенъ треугольнику fgh и потому также является равнобедреннымъ. Этимъ способомъ можно найти произвольное число точекъ кривой, черезъ которыя можно уже отъ руки провести кривую съ желаемою степенью точности. Кривая симметрична относительно оси x-овъ. Точка A, въ которой она пересѣкается осью, называется ея **вершиной** (фиг. 74).



Фиг. 74.

4. Если мы хотимъ получить уравненіе параболы въ прямоугольныхъ координатахъ, то достаточно возвести уравненіе (1) въ квадратъ и положить въ немъ $r^2 = x^2 + y^2$. Такимъ образомъ мы получимъ уравненіе

$$y^2 = p^2 - 2px, \qquad (2)$$

которое содержитъ во второй степени только одну изъ двухъ координатъ, а именно y.

5. Это уравненіе можно также представить и въ такомъ видѣ:

$$y^2 + 2p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0, \qquad (3)$$

или, если положить $x - p/2 = x_1$, $y = y_1$, въ видѣ:

$$y_1{}^2 + 2px_1 = 0. \qquad (4)$$

Въ этомъ случаѣ x_1, y_1 являются координатами точки, отнесенными къ системѣ координатъ, начало которой совпадаетъ съ вершиной; поэтому уравненіе (4) называется уравненіемъ параболы, отнесеннымъ къ вершинѣ. Уравненіе

$$y_1{}^2 - 2px_1 = 0 \qquad (5)$$

представляетъ параболу, которая конгруэнтна первой и является ея отраженіемъ отъ оси y-овъ, такъ что отверстія ихъ обращены въ противоположныя стороны.

6. Если возьмемъ уравненіе эллипса въ видѣ (§ 68 (7)):

$$b^2(x - c)^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

положимъ въ немъ

$$b^2 = cp,\ a^2 = c^2 + b^2 = c(c + p),$$

а также $(x - c)^2 = x^2 - 2cx + c^2$, и раздѣлимъ его на c^2, то получимъ:

$$\frac{px^2}{c} + \left(1 + \frac{p}{c}\right) y^2 - 2px = p^2. \tag{6}$$

Если предположить, что c возрастаетъ безконечно, то дробь $p : c$ стремится къ нулю, и въ предѣлѣ мы получаемъ уравненіе

$$y^2 - 2px = p^2,$$

которое при замѣнѣ x черезъ $-x$ переходитъ въ уравненіе (2) параболы.

Такимъ образомъ, если, оставляя неизмѣнными одинъ изъ фокусовъ эллипса и его параметръ $2p$, мы другой фокусъ удалимъ на безконечное разстояніе, то эллипсъ перейдетъ въ параболу.

Такимъ же образомъ можно параболу получить и изъ гиперболы.

Три вида кривыхъ: — эллипсъ, гипербола и парабола — извѣстны подъ общимъ названіемъ коническихъ сѣченій.

Окружность содержится въ числѣ ихъ, какъ частный случай.

§ 70. Преобразованіе координатъ.

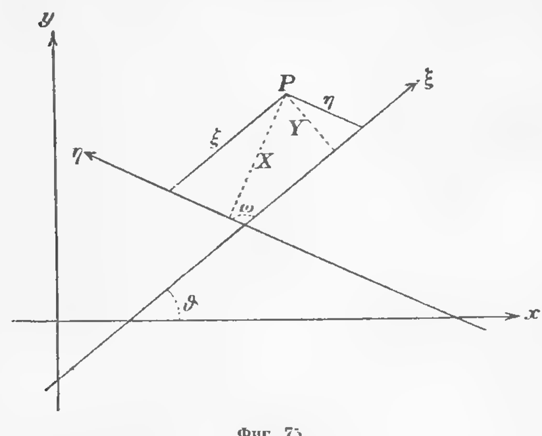
1. Формулы, которыми аналитическая геометрія пользуется для выраженія геометрическихъ соотношеній, зависятъ отъ двухъ обстоятельствъ. Во-первыхъ, онѣ зависятъ отъ природы и свойствъ представляемой фигуры; но, съ другой стороны, онѣ обусловлены также и положеніемъ системы координатъ, которое нисколько не связано со свойствами фигуры. Такъ, каждое линейное уравненіе $ax + by + c = 0$ представляетъ нѣкоторую прямую, между тѣмъ какъ геометрически всѣ прямыя линіи совершенно однородны; если же, напримѣръ, принять за ось x-овъ прямую, которую намъ нужно выразить, то мы получимъ значительно болѣе простое уравненіе $y = 0$.

Такимъ образомъ, при болѣе сложныхъ соотношеніяхъ, является прежде всего необходимымъ отдѣлить то, что вытекаетъ изъ свойствъ самой фигуры, отъ того, что зависитъ лишь отъ случайнаго выбора системы координатъ; для этого служитъ преобразованіе координатъ.

2. Наша система координатъ состоитъ изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ x, y, изъ коихъ каждая имѣетъ нѣкоторое опредѣленное положительное направленіе; допустимъ, напримѣръ, что положительное направленіе оси y-овъ лежитъ влѣво отъ наблюдателя, движущагося по оси x-овъ въ положительномъ ея направленіи. Каждая изъ этихъ осей дѣлитъ плоскость на двѣ полуплоскости. Мы будемъ считать положительной ту сторону разсматриваемой оси, на которую указываетъ положительное направленіе другой оси.

Замѣтимъ, что это опредѣленіе съ прежнимъ опредѣленіемъ положительной стороны прямой (§ 57, 8) совпадаетъ только для одной изъ двухъ осей; для другой же эти опредѣленія даютъ противоположные результаты.

3. Возьмемъ теперь произвольную прямую ξ съ опредѣленнымъ положительнымъ направленіемъ. Тогда, какъ указано въ § 57, 8, часть плоскости, лежащая влѣво отъ этого направленія, является положительной стороной линіи ξ.



Фиг. 75.

Обозначимъ черезъ Y разстояніе отъ этой прямой нѣкоторой точки P съ координатами x, y, черезъ Y_0 разстояніе начала координатъ отъ нея, и, наконецъ, черезъ ϑ — уголъ, составленный положительнымъ направленіемъ прямой ξ съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ; тогда, согласно § 57, (4),

$$Y = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta + Y_0, \tag{1}$$

при чемъ разстояніе точки отъ прямой ξ считается положительнымъ, если точка лежитъ съ положительной стороны прямой, а въ противоположномъ случаѣ оно считается отрицательнымъ.

Возьмемъ вторую прямую η, положительное направленіе которой составляетъ съ положительнымъ направленіемъ прямой ξ уголъ ω, и, слѣдовательно, съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ образуетъ уголъ $\vartheta + \omega$. Обозначимъ разстояніе отъ этой прямой точки P черезъ X, а начала координатъ черезъ $-X_0$; тогда (§ 57, (4))

$$X = x\sin(\vartheta + \omega) - y\cos(\vartheta + \omega) + X_0. \tag{2}$$

Въ этомъ случаѣ X и Y выразятъ разстоянія точки P отъ обѣихъ прямыхъ, если (какъ это было условлено относительно осей координатъ) для каждой изъ этихъ прямыхъ положительной будетъ считаться та сторона, съ которой расположено положительное направленіе другой прямой. Если положимъ еще

$$X = \xi\sin\omega, \quad Y = \eta\sin\omega$$
$$X_0 = \xi_0\sin\omega, \quad Y_0 = \eta_0\sin\omega,$$

то ξ, η будутъ сторонами нѣкотораго параллелограмма, построеннаго на прямыхъ ξ, η, при чемъ вершиной, противоположной этимъ сторонамъ,

является точка P; то же можно сказать о величинахъ ξ_0, η_0 и началѣ координатъ.

Мы получаемъ соотношенія:

$$\begin{aligned} \xi \sin\omega &= x\sin(\vartheta+\omega) - y\cos(\vartheta+\omega) + \xi_0 \sin\omega, \\ \eta \sin\omega &= -\, x\sin\vartheta + y\cos\vartheta + \eta_0 \sin\omega; \end{aligned} \tag{3}$$

если $\sin\omega$ не обращается въ нуль, какъ мы это и допустимъ, то величины ξ, η называются **координатами точки** P относительно системы координатъ ξ, η. Дѣйствительно, эти величины такъ же опредѣляютъ положеніе точки P, какъ и координаты x, y (фиг. 75).

Если уголь ω не прямой, то система координатъ ξ, η называется **косоугольной**.

4. Если мы желаемъ выразить старыя координаты x, y черезъ новыя ξ, η, то нужно разрѣшить уравненія (3) относительно x, y. Для этой цѣли умножимъ эти уравненія, соотвѣтственно, на $\cos\vartheta$, $\cos(\vartheta+\omega)$ и полученныя уравненія сложимъ, затѣмъ умножимъ тѣ же уравненія на $\sin\vartheta$, $\sin(\vartheta+\omega)$ и результаты опять сложимъ. Принимая во вниманіе соотношеніе

$$\cos\vartheta \sin(\vartheta+\omega) - \sin\vartheta\cos(\vartheta+\omega) = \sin\omega$$

и полагая

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi_0 \cos\vartheta + \eta_0 \cos(\vartheta+\omega), \\ y_0 &= \xi_0 \sin\vartheta + \eta_0 \sin(\vartheta+\omega), \end{aligned}$$

получимъ:

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\vartheta + \eta\cos(\vartheta+\omega) + x_0, \\ y &= \xi\sin\vartheta + \eta\sin(\vartheta+\omega) + y_0. \end{aligned} \tag{4}$$

5. Если ξ_0, η_0, — а слѣдовательно, и x_0, y_0 — равны нулю, то обѣ системы координатъ имѣютъ общее начало и лишь оси измѣняютъ свое направленіе. Въ этомъ случаѣ

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\vartheta + \eta\cos(\vartheta+\omega), \\ y &= \xi\sin\vartheta + \eta\sin(\vartheta+\omega); \end{aligned} \tag{5}$$

отъ этихъ уравненій мы снова приходимъ къ общему случаю, если замѣнимъ x, y черезъ $x - x_0$, $y - y_0$.

Преобразованіе координатъ можетъ быть разложено, такимъ образомъ, на два послѣдовательныхъ частныхъ преобразованія, изъ коихъ одно сводится къ **вращенію осей**, а другое — къ ихъ **параллельному перенесенію**.

6. Если $\omega = \pi/2$, то новая система координатъ также является прямоугольной. Въ этомъ случаѣ формулы (3) принимаютъ видъ:

$$\xi = \xi_0 + x\cos\vartheta + y\sin\vartheta,$$
$$\eta = \eta_0 - x\sin\vartheta + y\cos\vartheta; \qquad (6)$$

разрѣшивъ ихъ относительно x, y, получимъ:

$$x = x_0 + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta,$$
$$y = y_0 + \xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta. \qquad (7)$$

Если положимъ $\omega = -\frac{\pi}{2}$, то вторая система координатъ также будетъ прямоугольной, но ось η будетъ имѣть относительно оси ξ расположеніе, противоположное тому, которое ось y-овъ имѣетъ относительно оси x-овъ.

§ 71. Кривыя второго порядка.

1. Въ уравненіе прямой линіи

$$ax + by + c = 0$$

координаты x, y перемѣнной точки входятъ только въ первой степени и не перемножаются; это свойство сохраняется и въ томъ случаѣ, если мы, согласно § 70, выразимъ x, y черезъ координаты какой-нибудь косоугольной системы. Поэтому прямыя линіи въ аналитической геометріи называются линіями перваго порядка, а уравненія, выражающія прямыя линіи, носятъ названіе линейныхъ уравненій.

2. Въ уравненіе окружности входятъ квадраты величинъ x и y, но не входитъ ихъ произведеніе. Но это послѣднее появляется, коль скоро мы, согласно § 70, переходимъ къ косоугольной системѣ. Съ другой стороны, къ какимъ бы преобразованіямъ мы ни прибѣгали, въ уравненіи окружности не встрѣчаются степени перемѣнныхъ, высшія второй.

Мы приписываемъ членамъ x^2, y^2, xy порядокъ 2, первымъ степенямъ x, y — порядокъ 1, наконецъ, постоянной величинѣ — порядокъ 0; въ связи съ этимъ мы называемъ функціей второго порядка или второй степени такую функцію, которая содержитъ члены второго порядка, но не содержитъ членовъ болѣе высокаго порядка. Если мы приравниваемъ эту функцію нулю, то получаемъ уравненіе второй степени. Уравненіе окружности, такимъ образомъ, есть уравненіе второй степени, но не каждое уравненіе второй степени выражаетъ окружность. Уравненія коническихъ сѣченій, выведенныя нами въ §§ 68, 69, также представляютъ собою уравненія второй степени.

Совокупность точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ нѣкоторому уравненію второй степени, образуетъ линію, или кривую второго порядка, или второй степени.

3. По опредѣленію, общій видъ функціи второй степени (T. I, § 90) таковъ:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy. \qquad (1)$$

При этомъ a, b, c, $2a'$, $2b'$, $2c'$ означаютъ какіе-либо постоянные коэффиціенты (обозначеніе трехъ послѣднихъ коэффиціентовъ черезъ $2a'$, $2b'$, $2c'$ вмѣсто a', b', c' не имѣетъ существеннаго значенія, оно позволяетъ лишь нѣсколько проще представлять нѣкоторыя формулы).

Въ случаѣ надобности можно и функцію первой степени разсматривать, какъ частный случай функціи второй степени, положивъ коэффиціенты a, b, c равными нулю.

Функцію $f(x, y)$ можно расположить по степенямъ одной изъ двухъ перемѣнныхъ; располагая по степенямъ y, получимъ

$$f(x, y) = by^2 + 2F_1 y + F_2, \qquad (2)$$

при чемъ мы полагаемъ

$$F_1 = c'x + a', \quad F_2 = ax^2 + 2b'x + c. \qquad (3)$$

4. Сопоставимъ теперь уравненіе второй степени

$$f(x, y) = 0, \qquad (4)$$

которое мы будемъ называть уравненіемъ кривой f, съ уравненіемъ прямой линіи l.

Если черезъ ϑ мы обозначимъ уголь, составляемый прямой l съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ, и положимъ $p = \operatorname{tg}\vartheta$, то уравненіе прямой линіи получитъ видъ (§ 58, (5))

$$y = px + q, \qquad (5)$$

гдѣ q представляетъ собой отрѣзокъ (съ положительнымъ или отрицательнымъ знакомъ), отсѣкаемый прямой на оси y-овъ (т. е. значеніе координаты y для $x = 0$).

Частный случай, когда прямая параллельна оси y-овъ и, такимъ образомъ, $\vartheta = \pi/2$, получится, если p будетъ стремиться къ безконечности.

Спросимъ себя теперь, какой смыслъ имѣетъ совмѣстное существованіе обоихъ уравненій (4) и (5).

Если величины x, y удовлетворяютъ уравненію (4), то точка π, имѣющая координаты x, y, лежитъ на кривой f; если же выполняется и уравненіе (5), то точка π лежитъ и на прямой l. Такимъ образомъ, если оба уравненія выполняются совмѣстно, то это показываетъ, что точка π лежитъ одновременно на обѣихъ линіяхъ и является поэтому точкой пересѣченія кривой f съ прямой l. Итакъ, совмѣстное рѣшеніе обоихъ уравненій (4) и (5) относительно неизвѣстныхъ x, y даетъ координаты точки или точекъ пересѣченія обѣихъ линій.

5. Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ алгебраической задачѣ, а именно — къ опредѣленію двухъ неизвѣстныхъ величинъ изъ уравненій первой и второй степени. Для того, чтобы разрѣшить ихъ, выразимъ величину y черезъ x изъ уравненія (5) и подставимъ это выраженіе въ уравненіе (4), при чемъ функцію $f(x, y)$ возьмемъ въ формѣ (2); мы получимъ:

$$b(px+q)^2 + 2F_1(px+q) + F_2 = 0;$$

или, подставивъ вмѣсто F_1 и F_2 ихъ значенія (3) и расположивъ результатъ по степенямъ x, найдемъ:

$$Px^2 + 2Qx + R = 0, \qquad (6)$$

гдѣ мы, для сокращенія, положили:

$$\begin{aligned} P &= bp^2 + 2c'p + a \\ Q &= bpq + c'q + a'p + b', \\ R &= bq^2 + 2a'q + c. \end{aligned} \qquad (7)$$

Такимъ образомъ, мы получаемъ квадратное уравненіе относительно x. Если мы возьмемъ одинъ изъ корней этого уравненія, то уравненіе (5) дастъ возможность опредѣлить соотвѣтствующее значеніе y, такъ что каждому корню уравненія (6) отвѣчаетъ одна и только одна точка пересѣченія кривой f и прямой l.

§ 72. Касательныя.

1. Квадратное уравненіе имѣетъ либо два различныхъ вещественныхъ корня, либо два мнимыхъ, либо, наконецъ, два равныхъ вещественныхъ корня. Въ первомъ случаѣ мы заключаемъ, что прямая l и кривая f имѣютъ двѣ точки пересѣченія. Мнимые корни не имѣютъ никакого геометрическаго значенія и не даютъ точекъ пересѣченія; если поэтому уравненіе (6) § 71-го имѣетъ мнимые корни, то разсматриваемыя линіи вовсе не пересѣкаются. Но ради однообразія въ выраженіяхъ и въ этомъ случаѣ говорятъ, что прямая и кривая имѣютъ двѣ мнимыя точки пересѣченія.

Если, наконецъ, уравненіе (6) имѣетъ два равныхъ корня, то кривая и прямая имѣютъ только одну общую точку; она разсматривается тогда, какъ точка, въ которой совпадаютъ двѣ точки пересѣченія. Въ этомъ случаѣ прямая называется касательной, или прямой соприкосновенія, къ кривой второго порядка.

2. Если мы разрѣшимъ уравненіе (6) относительно x, то получимъ (Т. I, § 43):

$$x = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - PR}}{P};$$

такимъ образомъ, если

$$Q^2 - PR \text{ есть положительное число,}$$

то будутъ существовать двѣ дѣйствительныя точки пересѣченія; если

$$Q^2 - PR \text{ есть отрицательное число,}$$

то точки пересѣченія будутъ мнимыя; наконецъ, случаю

$$Q^2 - PR = 0 \tag{1}$$

отвѣчаетъ совпаденіе точекъ пересѣченія въ одну.

3. Равенство (1) можетъ быть представлено въ развернутомъ видѣ такъ:

$$(bpq + c'q + a'p + b')^2 - (bp^2 + 2c'p + a)(bq^2 + 2a'q + c) = 0; \tag{2}$$

если открыть скобки, то многіе члены уничтожатся. Для того, чтобы окончательное выраженіе представить въ болѣе простомъ видѣ, мы введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\begin{aligned} A &= bc - a'^2, & A' &= b'c' - aa', \\ B &= ca - b'^2, & B' &= c'a' - bb', \\ C &= ab - c'^2, & C' &= a'b' - cc'. \end{aligned} \tag{3}$$

Здѣсь величины A, B, C, A', B', C' являются минорами (ч. I, § 40) опредѣлителя

$$H = \begin{vmatrix} a, & c', & b' \\ c', & b, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix},$$

и равенство (2) принимаетъ простой видъ:

$$Ap^2 + Cq^2 + B - 2A'q - 2C'p + 2B'pq = 0. \tag{4}$$

Это равенство выражаетъ условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты p, q, если прямая l есть касательная къ кривой f.

Если взять уравненіе прямой l въ видѣ

$$ux + vy + w = 0,$$

то $p = -u/v$, $q = -w/v$, и равенство (4) получаетъ еще болѣе изящный видъ:

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv = 0.$$

§ 73. Асимптоты.

1. Относительно пересѣченія прямой и кривой второго порядка встрѣчаются и другія особенности, къ разсмотрѣнію которыхъ мы сейчасъ и приступаемъ.

Можетъ случиться, что для нѣкоторыхъ значеній p, q коэффиціентъ P въ уравненіи (6) § 71-го исчезаетъ, такъ что

$$bp^2 + 2c'p + a = 0. \quad (1)$$

Если это имѣетъ мѣсто, то уравненіе (6) сводится къ уравненію первой степени, и линія l имѣетъ только одну точку, общую съ кривой f, не будучи, однако, касательной къ ней.

Такъ какъ уравненіе (1) содержитъ только параметръ p, то указанное обстоятельство опредѣляетъ только направленіе прямой l; направленіе это называется асимптотическимъ.

Линіи, имѣющія асимптотическое направленіе, образуютъ, такимъ образомъ, систему параллельныхъ прямыхъ.

2. Уравненіе (1) является квадратнымъ относительно p; отсюда можно заключить, что вообще существуютъ два асимптотическихъ направленія. Оба корня содержатся въ формулѣ:

$$p = \frac{-c' \pm \sqrt{c'^2 - ab}}{b}; \quad (2)$$

если здѣсь положимъ

$$D = c'^2 - ab, \quad (3)$$

то получимъ

$$bp + c' = \pm \sqrt{D}. \quad (4)$$

Встрѣчающаяся здѣсь величина D (которая совпадаетъ съ извѣстной уже изъ § 72, (3) величиной C) называется дискриминантомъ функціи $f(x, y)$.

3. Вообще могутъ встрѣтиться три случая, сообразно съ которыми мы и различаемъ виды кривыхъ второго порядка.

a) $D < 0$, асимптотическія направленія являются мнимыми: кривая называется **эллипсомъ.**

b) $D > 0$, асимптотическія направленія дѣйствительны: кривая является **гиперболой.**

c) $D = 0$, существуетъ лишь одно асимптотическое направленіе: этому случаю отвѣчаетъ **парабола.**

Кривыя, отвѣчающія даннымъ въ §§ 68, 69 опредѣленіямъ эллипса, гиперболы и параболы, разсматриваемыя, какъ кривыя второго порядка, представляютъ собой примѣры этихъ трехъ случаевъ. Мы увидимъ позже, насколько вообще прежнія опредѣленія совпадаютъ съ тѣми, которыя даны здѣсь.

4. Если въ уравненіи (6) § 71-го, кромѣ P, обращается въ нуль также и Q, между тѣмъ какъ R отлично отъ нуля, то этому уравненію вообще

нельзя удовлетворить никакими значеніями неизвѣстной величины, и прямая l не имѣетъ съ кривой второго порядка ни дѣйствительной ни мнимой общей точки. Въ этомъ случаѣ прямая l называется асимптотой. Такъ какъ $P=0$, то асимптота, во всякомъ случаѣ, имѣетъ асимптотическое направленіе. Условія того, чтобы прямая была асимптотой, мы получимъ, если, опредѣливши p изъ уравненія $P=0$, величину q опредѣлимъ изъ линейнаго уравненія $Q=0$. Принимая во вниманіе соотношеніе (4), найдемъ:

$$\mp \sqrt{D}q = a'p + b' = \frac{-B' \pm a'\sqrt{D}}{b}; \qquad (5)$$

такимъ образомъ, въ случаѣ гиперболы существуютъ двѣ вещественныя асимптоты.

Если $D=0$, то уравненіе (5) вовсе не имѣетъ рѣшеній, такъ что парабола не имѣетъ асимптоты.

Исключеніе представляется лишь въ томъ случаѣ, когда одновременно съ D обращается въ нуль и выраженіе $a'p+b'$. Тогда уравненіе (5) выполняется для всѣхъ значеній q, и каждая линія съ асимптотическимъ направленіемъ является въ то же время асимптотой. Но это обстоятельство можетъ имѣть мѣсто лишь для несобственныхъ кривыхъ второго порядка, разсматриваемыхъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

5. Если $b=0$, то одинъ изъ корней (2) обращается въ безконечность, т. е. ось y-овъ имѣетъ асимптотическое направленіе. Уравненіе линіи, параллельной оси y-овъ, имѣетъ видъ $x=x_0$, гдѣ x_0 есть разстояніе этой линіи отъ оси y-овъ. Ордината единственной точки пересѣченія, этой линіи и кривой получится изъ уравненія

$$2y(c'x_0 + a') + ax_0^2 + 2b'x_0 + c = 0;$$

такимъ образомъ, если $c'x_0 + a' = 0$, то не существуетъ вовсе точекъ пересѣченія, и линія $x=x_0$ является асимптотой. Уравненіе $c'x_0 + a' = 0$ опредѣляетъ лишь одно значеніе для x_0, за исключеніемъ того случая, когда $c'=0$. Если же, кромѣ b, и c' обращается въ нуль, то снова $D=0$.

§ 74. Несобственныя, или распадающіяся кривыя второго порядка.

1. Остается, наконецъ, изслѣдовать тотъ случай, когда въ квадратномъ уравненіи (6) § 71-го, отъ котораго зависятъ общія точки кривой f и прямой l, всѣ три коэффиціента P, Q, R обращаются въ нуль. Если это имѣетъ мѣсто, то каждая точка прямой l является въ то же время точкой кривой f. Такимъ образомъ, прямая оказывается частью этой кривой.

Въ этомъ случаѣ функція $f(x, y)$ можетъ быть разложена на два линейныхъ множителя L, L', и уравненіе $f(x, y) = 0$ только тогда

удовлетворяется, если исчезаетъ либо L, либо L'. Кривая, такимъ образомъ, распадается на двѣ прямыхъ линіи, уравненія которыхъ будутъ $L = 0$, $L' = 0$. Мы будемъ такую кривую f называть **несобственной**, или **распадающейся кривой второго порядка**.

2. Для того, чтобы обнаружить, разлагается ли функція f на множителей и вмѣстѣ съ тѣмъ въ благопріятномъ случаѣ разыскать множителей L и L', замѣтимъ, что, если P, Q, R одновременно исчезаютъ, согласно § 71, 5, то уравненіе

$$b(px+q)^2 + 2F_1(px+q) + F_2 = 0 \qquad (1)$$

обращается въ тождество, т. е. удовлетворяется для всѣхъ значеній x, ибо это уравненіе тождественно съ уравненіемъ $Px^2 + 2Qx + R = 0$.

Далѣе, согласно § 71, (2),

$$f(x, y) = by^2 + 2F_1 y + F_2; \qquad (2)$$

и если вычесть уравненіе (1) изъ уравненія (2) и воспользоваться разложеніемъ

$$y^2 - (px+q)^2 = (y - px - q)(y + px + q),$$

то, замѣняя F_1 черезъ $c'x + a'$ (§ 71, (3)), получимъ:

$$f(x, y) = (y - px - q)[b(y + px + q) + 2(c'x + a')].$$

Такимъ образомъ, функція $f(x, y)$ разложена на два множителя

$$L = y - px - q, \quad L' = by + (bp + 2c')x + bq + 2a'. \qquad (3)$$

3. Въ § 90 тома I-го условіе распаденія квадратной функціи f было нами представлено въ видѣ равенства:

$$H = \begin{vmatrix} a, & c', & b' \\ c', & b, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix} = 0,$$

которое въ развернутомъ видѣ можетъ быть переписано такъ:

$$abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = 0. \qquad (4)$$

Для того, чтобы вывести это условіе изъ того обстоятельства, что обращаются въ нуль величины P, Q, R, можно поступить слѣдушимъ образомъ.

Мы постараемся изъ трехъ уравненій $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} bp^2 + 2c'p + a &= 0, \\ bpq + c'q + a'p + b' &= 0, \\ bq^2 + 2a'q + c &= 0, \end{aligned} \qquad (5)$$

исключить обѣ неизвѣстныя величины p и q. Изъ второго уравненія вытекаетъ:

$$q = \frac{a'p + b'}{bp + c'};$$

если мы это выраженіе подставимъ въ третье уравненіе и умножимъ результатъ на $(bp + c')^2$, то получимъ:

$$b(a'p + b')^2 - 2a'(a'p + b')(bp + c') + c(bp + c')^2 = 0.$$

Расположимъ это уравненіе по степенямъ p; тогда, воспользовавшись обозначеніями (3) § 72-го

$$A = bc - a'^2, \quad B' = c'a' - bb', \quad C' = a'b' - cc',$$

придемъ къ равенству:

$$(bp^2 + 2c'p)A - b'B' - c'C' = 0,$$

которое въ связи съ равенствомъ (5) даетъ:

$$Aa + B'b' + C'c' = 0,$$

что въ развернутомъ видѣ совпадаетъ съ равенствомъ (4).

Въ томъ случаѣ (исключенномъ нами изъ разсмотрѣнія), когда функція $f(x, y)$ вовсе не содержитъ перемѣнной y и, такимъ образомъ, уравненіе $f = 0$ представляетъ двѣ прямыя, параллельныя оси y-овъ, имѣютъ мѣсто равенства $a' = 0$, $b = 0$, $c' = 0$ и, слѣдовательно, условіе (4), равнымъ образомъ, выполняется.

4. Если черезъ ϑ и ϑ' обозначимъ соотвѣтственно углы, образуемые прямыми L и L' распадающейся кривой второго порядка съ осью x-овъ, то, согласно уравненію (3) (если предположимъ b отличнымъ отъ нуля),

$$\operatorname{tg}\vartheta = p, \quad \operatorname{tg}\vartheta' = -p - \frac{2c'}{b};$$

такимъ образомъ, если оба эти выраженія равны другъ другу, т. е. $p = -c'/b$, то обѣ линіи становятся взаимно параллельными. Въ этомъ случаѣ изъ перваго равенства (5) вытекаетъ, что $c'^2 - ab = 0$. Итакъ, для того, чтобы кривая f распалась на двѣ параллельныя прямыя, необходимы условія, выражаемыя двумя равенствами

$$H = 0, \quad D = 0.$$

5. Наконецъ, оба множителя L и L' могутъ также представлять одну и ту же прямую, такъ что кривая обращается въ одну прямую, дважды повторенную.

Въ этомъ случаѣ выраженія L и L' должны отличаться только множителемъ b; поэтому должно быть:

$$p = -\frac{c'}{b}, \quad q = -\frac{a'}{b},$$

и равенства (5) принимаютъ видъ:

$$ab - c'^2 = 0, \quad bb' - a'c' = 0, \quad cb - a'^2 = 0, \tag{6}$$

откуда легко выводятся другія равенства:

$$cc' - a'b' = 0, \quad ac - b'^2 = 0, \quad aa' - c'b' = 0. \tag{7}$$

Такимъ образомъ, для того, чтобы функція f представляла собой квадратъ линейной функціи, необходимо, чтобы не только опредѣлитель H, но и всѣ его миноры A, B, C, A', B', C' обращались въ нуль.

Исключенный раньше случай $b = 0$, тѣмъ не менѣе, также содержится въ этихъ общихъ результатахъ. Въ самомъ дѣлѣ, если $b = 0$, то уравненіе $f = 0$ только тогда можетъ представлять двѣ параллельныя прямыя, если таковыя параллельны оси y-овъ, т. е. если одновременно исчезаютъ величины a' и c', а, слѣдовательно, также H и D; обѣ эти прямыя совпадаютъ, если къ тому же и $ac - b'^2 = 0$. Такимъ образомъ, и въ этомъ случаѣ также выполняются равенства (6), (7).

6. Если сохранить прежнія обозначенія въ выраженіяхъ

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + 2c'xy + 2b'x + 2a'y + c,$$
$$D = c'^2 \quad ab,$$

то прямая съ асимптотическимъ направленіемъ, проходящая черезъ начало координатъ, имѣетъ уравненіе (§ 71, (5), § 73, (4)):

$$by + c'x \quad x\sqrt{D} - 0;$$

перемноживъ заключающіяся въ этомъ выраженіи два уравненія и раздѣливъ результатъ на b, получимъ равенство

$$ax^2 + by^2 + 2c'xy = 0, \tag{8}$$

представляющее уравненіе пары прямыхъ асимптотическаго направленія.

§ 75. Точки пересѣченія двухъ кривыхъ второго порядка.

1. Если даны два уравненія второй степени

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ax^2 + by^2 + c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy = 0, \\ \varphi(x, y) &= \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma + 2\alpha'y + 2\beta'x + 2\gamma'xy = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

то значенія, удовлетворяющія одновременно обоимъ уравненіямъ, являются координатами точекъ пересѣченія кривыхъ f и φ. Мы уже въ § 90 тома I-го видѣли, что существуютъ четыре системы рѣшеній этихъ уравненій, при чемъ опредѣленіе ихъ зависитъ отъ рѣшенія нѣкотораго уравненія четвертой степени; отсюда мы заключаемъ, что двѣ кривыя второго порядка вообще пересѣкаются въ четырехъ точкахъ.

2. Уравненіе четвертой степени, которымъ опредѣляются координаты этихъ точекъ пересѣченія, можетъ быть составлено слѣдующимъ образомъ. Мы полагаемъ:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= by^2 + 2F_1y + F_2 = 0 \quad \Big| \quad \beta, \quad -\Phi_2, \\ \varphi(x,y) &= \beta y^2 + 2\Phi_1 y + \Phi_2 = 0 \quad \Big| \quad -b, \quad F_2, \end{aligned} \tag{2}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} F_1 &= c'x + a', \quad F_2 = ax^2 + 2b'x + c, \\ \Phi_1 &= \gamma' x + \alpha', \quad \Phi_2 = \alpha x^2 + 2\beta' x + \gamma. \end{aligned} \tag{3}$$

Такимъ образомъ, F_1 и Φ_1 являются функціями первой степени относительно x, а F_2 и Φ_2 — функціями второй степени.

Если мы послѣдовательно умножимъ уравненія (2) на приписанныхъ справа множителей и результаты сложимъ, то получимъ два уравненія:

$$\begin{aligned} 2(F_1\beta - \Phi_1 b)y + (F_2\beta - \Phi_2 b) &= 0, \\ (F_2\beta - \Phi_2 b)y + 2(F_2\Phi_1 - F_1\Phi_2) &= 0, \end{aligned}$$

изъ которыхъ опредѣляется y:

$$y = -\frac{1}{2}\,\frac{F_2\beta - \Phi_2 b}{F_1\beta - \Phi_1 b} = -2\,\frac{F_2\Phi_1 - F_1\Phi_2}{F_2\beta - \Phi_2 b}. \tag{4}$$

Отсюда вытекаетъ:

$$(F_2\beta - \Phi_2 b)^2 - 4(F_1\beta - \Phi_1 b)(F_2\Phi_1 - F_1\Phi_2) = 0, \tag{5}$$

что, въ виду обозначеній (3), представляетъ собою уравненіе четвертой степени относительно x. Для каждаго значенія x, удовлетворяющаго этому уравненію, изъ уравненія (4) получимъ соотвѣтствующее значеніе y.

3. Уравненіе (5) въ частныхъ случаяхъ можетъ свестись къ уравненію третьей степени. Для того, чтобы узнать, въ какихъ случаяхъ это имѣетъ мѣсто, изслѣдуемъ коэффиціентъ при x^4 въ уравненіи (5). Если онъ исчезаетъ, то степень уравненія понижается до третьей, и обѣ кривыя имѣютъ лишь т р и т о ч к и п е р е с ѣ ч е н і я. Согласно положеніямъ (3), условіе, при которомъ это имѣетъ мѣсто, выражается равенствомъ:

$$(a\beta - b\alpha)^2 - 4(c'\beta - b\gamma')(a\gamma' - c'\alpha) = 0. \tag{6}$$

Вспомнимъ, что, согласно § 73, (1), уравненіемъ

$$bp^2 + 2c'p + a = 0$$

опредѣляются асимптотическія направленія для кривой f, и, равнымъ образомъ, уравненіе

$$\beta p^2 + 2\gamma' p + \alpha = 0$$

опредѣляетъ асимптотическія направленія для кривой φ. Если же мы исключимъ p изъ этихъ двухъ уравненій, подобно тому, какъ мы выше

исключили x изъ уравненій (2), то получимъ въ точности условіе (6); отсюда, такимъ образомъ, слѣдуетъ:

Двѣ кривыя второго порядка только тогда имѣютъ три точки пересѣченія, когда онѣ имѣютъ общее асимтотическое направленіе.

4. Уравненіе четвертой степени можетъ иногда свестись къ уравненію еще болѣе низкой степени, такъ что встрѣчаются пары кривыхъ второго порядка, имѣющія только двѣ точки пересѣченія, или только одну, или, наконецъ, вовсе ихъ не имѣющія.

Если, напримѣръ, члены второй степени

$$ax^2 + 2c'xy + by^2, \quad \alpha x^2 + 2\gamma' xy + \beta y^2$$

отличаются только постояннымъ множителемъ, т. е. если

$$a : c' : b = \alpha : \gamma' : \beta, \tag{7}$$

то степень уравненія (5) сводится ко второй, и кривыя имѣютъ, такимъ образомъ, только двѣ точки пересѣченія. Условія (7) выражаютъ совпаденіе обоихъ асимптотическихъ направленій. Этотъ случай имѣетъ мѣсто для двухъ окружностей, которыя, какъ извѣстно, будучи кривыми второго порядка, имѣютъ все же не болѣе двухъ общихъ точекъ. Асимптотическія направленія въ этомъ случаѣ оказываются мнимыми.

Кривыя второго порядка имѣютъ только двѣ общихъ точки также и тогда, когда онѣ имѣютъ не только общее асимптотическое направленіе, но и общую асимптоту.

Наконецъ, двѣ кривыя второго порядка могутъ имѣть только одну общую точку или вовсе ея не имѣть. Послѣднее имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ томъ случаѣ, если функціи f и φ отличаются одна отъ другой только постоянными членами, т. е. если $a = \alpha$, $b = \beta$, $a' = \alpha'$, $b' = \beta'$, $c' = \gamma'$ и c отлично отъ γ.

Наподобіе того, какъ о двухъ параллельныхъ прямыхъ говорятъ, что онѣ пересѣкаются въ безконечности, можно теорему о существованіи четырехъ точекъ пересѣченія двухъ кривыхъ второго порядка распространить и на эти случаи, взявши одну или болѣе точекъ пересѣченія въ безконечности.

Этому способу выраженія можно придать реальный смыслъ, если взять сначала функціи f и φ такими, чтобы существовали четыре точки пересѣченія, а затѣмъ заставить коэффиціенты $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ непрерывно стремиться къ тѣмъ частнымъ значеніямъ, которыя удовлетворяютъ спеціальнымъ условіямъ. При этомъ оказывается, что исчезающія въ предѣлѣ точки пересѣченія неограниченно удаляются подобно тому, какъ удаляется общая точка двухъ пересѣкающихся прямыхъ, если одна

изъ нихъ непрерывнымъ вращеніемъ приводится къ направленію, параллельному другой.

§ 76. Сопряженныя направленія и главныя направленія.

1. Мы переходимъ теперь къ упрощенію уравненія второй степени, при чемъ мы отнесемъ его къ нѣкоторой системѣ координатъ, наиболѣе удобной при частномъ видѣ функціи f, и разсмотримъ комплексъ кривыхъ, выражаемыхъ этимъ уравненіемъ.

Сначала мы прибѣгнемъ къ вращенію системы координатъ, сохраняя неизмѣннымъ начало. Согласно формуламъ § 70 (5), мы, такимъ образомъ, полагаемъ:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos\vartheta + \eta \cos(\vartheta + \omega), \\ y &= \xi \sin\vartheta + \eta \sin(\vartheta + \omega), \end{aligned} \qquad (1)$$

такъ что функція

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + 2c'xy + 2a'y + 2b'x + c \qquad (2)$$

переходитъ въ нѣкоторую функцію такого же вида:

$$\varphi(\xi, \eta) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + 2\gamma'\xi\eta + 2\alpha'\eta + 2\beta'\xi + \gamma, \qquad (3)$$

при чемъ, какъ легко провѣрить вычисленіемъ,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta + 2c'\sin\vartheta\cos\vartheta, \\ \beta &= a\cos^2(\vartheta+\omega) + b\sin^2(\vartheta+\omega) + 2c'\sin(\vartheta+\omega)\cos(\vartheta+\omega), \\ \gamma' &= a\cos\vartheta\cos(\vartheta+\omega) + b\sin\vartheta\sin(\vartheta+\omega) \\ &\qquad + c'(\cos\vartheta\sin(\vartheta+\omega) + \sin\vartheta\cos(\vartheta+\omega)), \\ \alpha' &= a'\sin\vartheta + b'\cos\vartheta, \\ \beta' &= a'\sin(\vartheta+\omega) + b'\cos(\vartheta+\omega), \\ \gamma &= c. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

2. Для упрощенія выраженія $\varphi(\xi, \eta)$ мы располагаемъ значеніями обоихъ угловъ ϑ, ω: мы опредѣлимъ ихъ такъ, чтобы $\gamma' = 0$.

Если мы положимъ

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta+\omega) &= \cos\vartheta\cos\omega - \sin\vartheta\sin\omega, \\ \sin(\vartheta+\omega) &= \sin\vartheta\cos\omega + \cos\vartheta\sin\omega \end{aligned}$$

то уравненіе $\gamma' = 0$ приметъ видъ:

$$\begin{aligned} &\cos\omega\,(a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta + 2c'\sin\vartheta\cos\vartheta) \\ &\qquad + \sin\omega((b - a)\sin\vartheta\cos\vartheta + c'(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)) = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Такимъ образомъ, если сначала оставить ϑ произвольнымъ, для ω получится уравненіе:

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta + 2c'\sin\vartheta\cos\vartheta}{(b - a)\sin\vartheta\cos\vartheta + c'(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)}, \qquad (6)$$

такъ что для каждаго произвольнаго направленія оси ξ получается одно направленіе (точнѣе—два противоположныхъ направленія), для оси η такого свойства, что въ уравненіе кривой, отнесенное къ системѣ осей $\xi\eta$, не входитъ членъ, содержащій произведеніе $\xi\eta$. Два такихъ направленія называются сопряженными направленіями.

3. Можетъ случиться, что оба сопряженныхъ направленія совпадаютъ въ одно, и тогда эти направленія не могутъ служить осями координатъ.

Это имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда уголъ ϑ взятъ такъ, что

$$a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta + 2c'\sin\vartheta\cos\vartheta = 0.$$

Откуда выводится квадратное уравненіе для $\operatorname{tg}\vartheta$:

$$b\operatorname{tg}^2\vartheta + 2c'\operatorname{tg}\vartheta + a = 0,$$

имѣющее корни:

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{c' \pm \sqrt{D}}{b},$$

гдѣ, какъ и прежде,

$$D = c'^2 - ab,$$

обозначаетъ дискриминантъ функціи f.

Сравненіе полученнаго результата съ равенствомъ (2) въ § 73 показываетъ, что асимтотическія направленія и только они совпадаютъ со своими сопряженными направленіями.

4. Постараемся теперь опредѣлить уголъ ϑ такъ, чтобы оба сопряженныхъ направленія были взаимно перпендикулярны. Такія направленія мы будемъ называть главными. Если мы отнесемъ уравненіе кривой къ осямъ, совпадающимъ съ главными направленіями, то система координатъ будетъ прямоугольной, и въ уравненіе кривой не войдетъ произведеніе обѣихъ перемѣнныхъ.

Главныя направленія всегда существуютъ. Для того, чтобы получить ихъ, положимъ въ формулѣ (6) $\omega = \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно, $\operatorname{tg}\omega$ равнымъ безконечности, т. е. знаменатель—равнымъ нулю. Это дастъ намъ:

$$(b - a)\sin\vartheta\cos\vartheta + c'(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = 0,$$

или, согласно формуламъ тригонометріи:

$$(b - a)\sin 2\vartheta + 2c'\cos 2\vartheta = 0, \tag{7}$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = -\frac{2c'}{b - a}. \tag{8}$$

Такъ какъ каждому положительному или отрицательному значенію тангенса отвѣчаетъ одинъ уголъ между $-\pi/2$ и $+\pi/2$, то соотношеніе (8) опредѣляетъ одно значеніе для угла ϑ въ предѣлахъ $-\pi/4$, $+\pi/4$. Этому же условію удовлетворяютъ и углы, отличающіеся отъ указаннаго значенія ϑ на число, кратное $\pi/2$; всѣ они даютъ лишь двѣ взаимно

перпендикулярныя прямыя линіи, изъ коихъ по произволу одна принимается за ось ξ, другая — за ось η.

5. Исключеніе представляется въ томъ случаѣ, когда уравненіе (7) выполняется для всякаго значенія угла ϑ, что имѣетъ мѣсто, если

$$a = b, \quad c' = 0.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе $f = 0$ выражаетъ окружность, для каковой любыя взаимно перпендикулярныя направленія являются главными.

Функція $f(x, y)$ при этомъ имѣетъ видъ

$$a(x^2 + y^2) + 2a'y + 2b'x + c$$

и можетъ быть представлена также въ видѣ

$$a\left[\left(x + \frac{b'}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{a'}{a}\right)^2\right] - \frac{a'^2 + b'^2 - ca}{a}.$$

Такимъ образомъ, числа $-\frac{b}{a}$, $-\frac{a'}{a}$ являются координатами центра круга, а число $(a'^2 + b'^2 - ac)/a$ есть квадратъ его радіуса.

6. Далѣе, можетъ также случиться, что для нѣкотораго опредѣленнаго угла ϑ числитель и знаменатель выраженія (6) одновременно исчезаютъ; тогда при такомъ значеніи ϑ уравненіе (5) выполняется для всѣхъ значеній ω, и коэффиціентъ γ' также для всѣхъ значеній ω равенъ нулю. Для этого величина ϑ должна быть такъ опредѣлена, чтобы одновременно выполнялись равенства

$$a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta + 2c'\sin\vartheta\cos\vartheta = 0,$$
$$(b - a)\sin\vartheta\cos\vartheta + c'(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = 0.$$

Оба эти равенства съ помощью соотношеній

$$2\cos^2\vartheta = 1 + \cos 2\vartheta, \quad 2\sin^2\vartheta = 1 - \cos 2\vartheta, \quad 2\sin\vartheta\cos\vartheta = \sin 2\vartheta$$

могутъ быть также представлены въ видѣ:

$$(a - b)\cos 2\vartheta + 2c'\sin 2\vartheta = -(a + b),$$
$$(a - b)\sin 2\vartheta - 2c'\cos 2\vartheta = 0;$$

если возведемъ ихъ въ квадратъ и сложимъ, то получимъ:

$$(a - b)^2 + 4c'^2 = (a + b)^2$$

или

$$c'^2 - ab = 0.$$

Если же, наоборотъ, выполняется это условіе, то изъ двухъ вышеприведенныхъ равенствъ одно является слѣдствіемъ другого.

Такимъ образомъ, тотъ частный случай, при которомъ γ' исчезаетъ для нѣкотораго значенія ϑ и для любого значенія ω, имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда дискриминантъ D обращается въ нуль, т. е. когда кривая второго порядка является параболой. Направленіе оси ξ въ этомъ случаѣ совпадаетъ съ единственнымъ въ этомъ случаѣ асимптотическимъ направленіемъ (§ 73, 3.).

7. Дискриминантъ D функціи второй степени $f(x, y)$ былъ опредѣленъ равенствомъ

$$D = c'^2 - ab.$$

Равнымъ образомъ и дискриминатъ Δ преобразованной функціи $\varphi(\xi, \eta)$ (§ 76, 1) опредѣляется равенствомъ

$$\Delta = c'^2 - \alpha\beta;$$

между обоими дискриминантами существуетъ нѣкоторое соотношеніе, вытекающее изъ выраженій (4) для α, β, γ'. Именно, если ихъ подставить въ выраженіе для Δ, то простое вычисленіе, которое мы предоставляемъ выполнить читателю, приводитъ къ результату:

$$\Delta = D \sin^2 \omega. \tag{9}$$

Такимъ образомъ, частное

$$\Delta : \sin^2 \omega$$

является совершенно независимой отъ измѣненія системы координатъ величиной, которая служитъ для характеристики кривой, представляемой уравненіемъ $f = 0$ или $\varphi = 0$. Эту величину мы будемъ называть дискриминантомъ этой кривой.

Классификація кривыхъ второго порядка, которая была нами выше произведена въ зависимости отъ знака дискриминанта, является, такимъ образомъ, совершенно независимой отъ выбора системы координатъ. Итакъ, мы будемъ различать:

1) кривыя второго порядка съ отрицательнымъ дискриминантомъ, или эллипсы;

2) кривыя второго порядка съ положительнымъ дискриминантомъ, или гиперболы;

3) кривыя второго порядка съ исчезающимъ дискриминантомъ, или параболы.

Такъ какъ $\sin^2 \omega$ всегда есть положительное число (уголъ ω не можетъ быть ни равнымъ нулю, ни кратнымъ π), то о принадлежности кривой къ одному изъ этихъ трехъ видовъ можно судить уже по функціи $\gamma'^2 - \alpha\beta$.

Прежде, чѣмъ перейти къ геометрическимъ свойствамъ указанныхъ трехъ видовъ кривыхъ, мы должны прибѣгнуть къ дальнѣйшему преобразованію координатъ, при чемъ къ вращенію системы осей мы присоединимъ еще ихъ параллельное перенесеніе.

§ 77. Центръ.

1. Мы примемъ теперь, что уравненіе кривой второго порядка уже отнесено къ системѣ сопряженныхъ направленій, взятыхъ за оси координатъ. Тогда въ уравненіи этомъ нѣтъ члена съ произведніемъ xy, и оно принимаетъ видъ:

$$ax^2 + by^2 + 2a'y + 2b'x + c = 0. \qquad (1)$$

Дискриминантомъ этой кривой является величина $-ab$, и мы различаемъ слѣдующіе случаи.

Уравненіе (1) представляетъ

эллипсъ, если коэффиціенты a и b имѣютъ одинаковые знаки,
гиперболу, если коэффиціенты a и b имѣютъ различные знаки,
параболу, если одинъ изъ коэффиціентовъ a или b равенъ нулю.
(Если оба коэффиціента a, b равны нулю, то уравненіе (1) представляетъ прямую линію).

2. Введемъ теперь опять новую систему координатъ ξ, η, оси которой параллельны, соотвѣтственно, осямъ x, y, а начало имѣетъ координанты x_0, y_0. Въ этомъ случаѣ

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0.$$

Коэффиціенты при ξ^2, η^2 совпадаютъ съ коэффиціентами при x^2, y^2, и уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$a\xi^2 + b\eta^2 + 2\alpha'\eta + 2\beta\,\xi + \gamma = 0, \qquad (2)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \alpha' &= by_0 + a', \\ \beta' &= ax_0 + b', \\ \gamma &= ax_0^2 + by_0^2 + 2a'y_0 + 2b'x_0 + c. \end{aligned} \qquad (3)$$

Надлежащій выборъ величинъ x_0, y_0 даетъ возможность сдѣлать дальнѣйшія упрощенія.

3. Если коэффиціенты a и b оба отличны отъ нуля, то положимъ

$$x_0 = -\frac{b'}{a}, \quad y_0 = -\frac{a'}{b},$$

благодаря чему α', β' обращаются въ нуль, и уравненіе (2) получаетъ видъ:

$$a\xi^2 + b\eta^2 + \gamma = 0. \qquad (4)$$

4. Если же одинъ изъ обоихъ коэффиціентовъ $a, b,$ — напримѣръ, a, равенъ нулю, такъ что кривая представляетъ собой параболу, то нельзя уже достигнуть того, чтобы величина β' обратилась въ нуль. Сдѣлаемъ тогда $\alpha' = 0$, т. е. положимъ $y_0 = - a : b$.

Если b' отлично отъ нуля, то координата x_0 можетъ быть опредѣлена изъ уравненія $\gamma = 0$, а именно

$$x_0 = \frac{a'^2 - bc}{2bb'},$$

и изъ уравненія (2) получимъ:

$$b\eta^2 + 2\beta'\xi = 0. \tag{5}$$

Если же $b' = 0$, то также и $\beta' = 0$ (для любого x_0), величина же γ независимо отъ x_0 становится равной $(bc - a'^2) : b$. Вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе принимаетъ видъ:

$$b\eta^2 + \gamma = 0. \tag{6}$$

Этимъ исчерпаны всѣ случаи, могущіе представиться для уравненія (1).

5. Равенства (4) и (6), въ которыхъ вовсе не содержится первыхъ степеней неизвѣстныхъ величинъ, остаются въ силѣ, если замѣнить ξ черезъ $-\xi$ и η черезъ $-\eta$. Каждая прямая, проходящая черезъ начало, пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ, равноотстоящихъ отъ начала. Начало координатъ называется центромъ кривой [18]).

Но между тѣмъ, какъ въ случаѣ (4) центромъ является единственная вполнѣ опредѣленная точка, въ случаѣ (6) любая точка оси ξ можетъ быть разсматриваема, какъ центръ. Въ случаѣ же (5) центра вовсе не существуетъ [19]).

Въ случаяхъ (4), (5) и (6) каждая хорда, параллельная оси η, дѣлится пополамъ осью ξ; въ случаѣ (4) также и каждая параллельная оси ξ хорда дѣлится пополамъ осью η.

Мы изучимъ теперь всевозможные частные случаи, какіе могутъ представиться въ отношеніи кривыхъ второго порядка.

6. Если въ уравненіи (4) коэффиціентъ γ отличенъ отъ нуля, и величины a, b, γ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, то, раздѣливши на γ и написавши a^2, b^2 вмѣсто $\gamma : a$, $\gamma : b$ и x, y вмѣсто ξ, η, получимъ:

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

---

[18]) Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что прямая, проходящая черезъ начало и встрѣчающая кривую въ точкѣ (ξ, η), встрѣчаетъ ее также въ точкѣ $(-\xi, -\eta)$, т. е. въ двухъ точкахъ, равноудаленныхъ отъ начала.

[19]) Въ случаѣ (4) координаты точки (x_0, y_0), въ которую нужно перенести начало, чтобы оно стало центромъ кривой, опредѣляются однозначно; въ случаѣ (6) координата x_0 остается произвольной; въ случаѣ (5) требуемыхъ значеній для x_0 и y_0 получить нельзя.

Но это уравненіе не удовлетворяется ни для одной вещественной точки, такъ какъ сумма трехъ положительныхъ величинъ не можетъ равняться нулю. Это уравненіе не имѣетъ никакого геометрическаго значенія: ему отвѣчаетъ мнимый эллипсъ.

7. Коэффиціентъ γ отличенъ отъ нуля. Коэффиціенты a, b имѣютъ одинаковые знаки, противоположные знаку γ. Если снова подставить a^2, b^2 вмѣсто $-\gamma : a$, $-\gamma : b$, то получится уравненіе

2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

выражающее эллипсъ.

8. Коэффиціентъ γ отличенъ отъ нуля. Величины b, γ имѣютъ одинаковые знаки, противоположные знаку a:

3) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Мы получаемъ гиперболу.

Случай, когда a, γ имѣютъ одинаковые знаки, противоположные знаку b, не существенно отличается отъ предыдущаго; получающееся при этомъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

переходитъ въ уравненіе 3), если ось x-овъ сдѣлать осью y-овъ и наоборотъ.

9. $\gamma = 0$, a, b имѣютъ одинаковые знаки. Подставивъ $1 : a^2$, $1 : b^2$ вмѣсто a, b, получимъ:

4) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Это уравненіе выполняется только для $x = 0$, $y = 0$, т. е. для начала координатъ. Но лѣвая его часть можетъ быть разложена на два комплексныхъ множителя первой степени:

$$\frac{x}{a} + \frac{iy}{b}, \quad \frac{x}{a} - \frac{iy}{b};$$

поэтому говорятъ, что уравненіе 4) выражаетъ пару мнимыхъ прямыхъ.

10. $\gamma = 0$; a, b имѣютъ различные знаки. Подставивъ $1 : a^2$, $1 : b^2$ вмѣсто a, b, получимъ:

5) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Это уравненіе выполняется, если

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

и потому представляетъ двѣ прямыя, которыя пересѣкаются такимъ образомъ въ началѣ и дѣлятся гармонически осями координатъ; итакъ, уравненію 5) отвѣчаетъ пара прямыхъ.

11. Мы переходимъ къ уравненію 5), въ которомъ коэффиціентъ b отличенъ отъ нуля. Если и коэффиціентъ β' отличенъ отъ нуля и имѣетъ притомъ знакъ, противоположный знаку b, то, замѣстивъ $\beta' : b$ черезъ $-p$, и снова написавъ x, y вмѣсто ξ, η, получимъ:

6) $$y^2 = 2px,$$

— это парабола.

Случай, когда b, β' имѣютъ одинаковые знаки, отличается не существенно отъ предыдущаго и приводится къ нему замѣной x черезъ $-x$.

12. Если въ уравненіи 5) $\beta' = 0$, то получаемъ уравненіе:

7) $$y^2 = 0,$$

которому удовлетворяютъ только точки оси x-овъ; въ этомъ случаѣ мы имѣемъ двѣ совпадающихъ прямыхъ.

13. Если въ уравненіи 6) коэффиціентъ γ отличенъ отъ нуля и имѣетъ знакъ, совпадающій со знакомъ b, то, положивъ $\gamma : b = c^2$, получаемъ

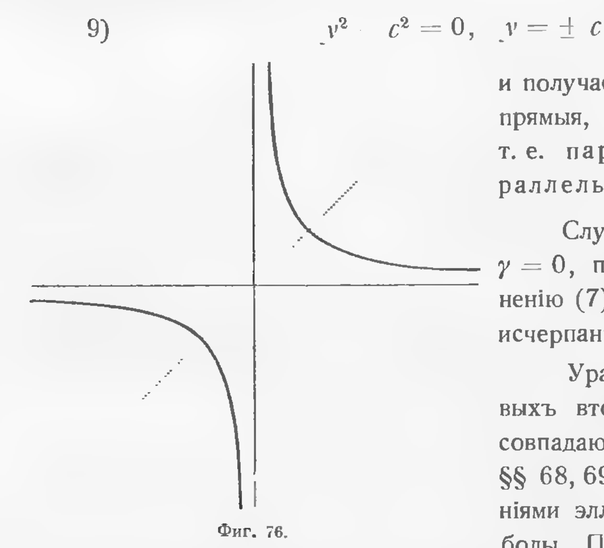
8) $$y^2 + c^2 = 0.$$

Это пара мнимыхъ параллельныхъ прямыхъ.

14. Если величины b и γ въ уравненіи 6) имѣютъ различные знаки, то мы приводимъ его къ виду:

9) $$y^2 - c^2 = 0, \quad y = \pm c$$

и получаемъ, такимъ образомъ, двѣ прямыя, параллельныя оси x-овъ, т. е. пару вещественныхъ параллельныхъ прямыхъ.



Фиг. 76.

Случай, когда въ уравненіи 6) $\gamma = 0$, приводитъ снова къ уравненію (7); такимъ образомъ, нами исчерпаны всевозможные случаи.

Уравненіе собственно кривыхъ второго парядка 2), 3), 6) совпадаютъ съ выведенными въ §§ 68, 69 другимъ путемъ уравненіями эллипса, гиперболы и параболы. При этихъ изслѣдованіяхъ за оси координатъ могла быть взята любая пара сопряженныхъ направленій. Но можно также, и притомъ однимъ лишь образомъ (исключая

частный случай окружности), исходить изъ прямоугольной системы координатъ (главныя оси), не нарушая общности.

Такимъ образомъ мы получили снова тѣ же кривыя, что и въ §§ 68, 69, и сверхъ того — несобственныя, или распадающіяся кривыя.

15. Для гиперболы асимптотами являются прямыя съ асимптотическимъ направленіемъ, проходящія черезъ центръ. Если выбрать асимптоты за оси координатъ, то для гиперболы получится уравненіе

$$xy = c. \tag{10}$$

Если асимптоты взаимно перпендикулярны, то гипербола называется равносторонней (фиг. 76).

§ 78. Касательныя къ эллипсу.

1. Въ послѣдующемъ мы разсмотримъ нѣкоторыя свойства эллипса и замѣтимъ лишь, что въ случаѣ гиперболы и параболы можно вести такія же разсужденія и получить аналогичные результаты. При этомъ уравненіе эллипса мы возьмемъ отнесеннымъ къ главнымъ осямъ, т. е. въ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

при прямоугольной системѣ координатъ.

Коэффиціенты, которые въ общемъ изслѣдованіи (§ 76) мы обозначили черезъ

$$a, \quad b, \quad c, \quad a', \quad b', \quad c',$$

теперь замѣнены черезъ

$$\frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{b^2}, \quad -1, \quad 0, \quad 0, \quad 0,$$

и минорами детерминанта H являются величины:

$$A = -\frac{1}{b^2}, \quad B = -\frac{1}{a^2}, \quad C = \frac{1}{a^2 b^2}, \quad A' = B' = C' = 0.$$

2. Такимъ образомъ, для того, чтобы прямая l, имѣющая уравненіе

$$y = px + q, \tag{2}$$

была касательной къ эллипсу, коэффиціенты p и q должны удовлетворять условію (§ 72, (4)):

$$-\frac{p^2}{b^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{q^2}{a^2 b^2} = 0,$$

или

$$a^2 p^2 + b^2 = q^2. \tag{3}$$

Если при этомъ прямая l проходитъ черезъ точку x_0, y_0, то должно выполняться равенство:

$$q = y_0 - px_0;$$

если же точка x_0, y_0 принадлежитъ также кривой и, такимъ образомъ, является точкой касанія, то ея координаты удовлетворяютъ уравненію эллипса, т. е.

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Уравненіе (3) въ этомъ предположеніи принимаетъ видъ:

$$(a^2 - x_0^2)p^2 + 2px_0y_0 + b^2 - y_0^2 = 0,$$

и, если, на основаніи равенства (4), положить

$$a^2 - x_0^2 = \frac{a^2y_0^2}{b^2}; \quad b^2 - y_0^2 = \frac{b^2x_0^2}{a^2},$$

то упомянутое уравненіе можетъ быть преобразовано такъ:

$$\frac{a^2y_0^2p^2}{b^2} + 2px_0y_0 + \frac{b^2x_0^2}{a^2} = 0.$$

Лѣвая часть этого равенства представляетъ квадратъ выраженія

$$\frac{ay_0p}{b} + \frac{bx_0}{a},$$

и мы въ результатѣ получаемъ, что

$$p = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Такимъ образомъ, уравненіе (2) принимаетъ видъ:

$$\frac{(x - x_0)\,b^2x_0}{a^2y_0} + y - y_0 = 0,$$

откуда, умноживъ его на $y_0 : b^2$ и воспользовавшись еще разъ равенствомъ (4), мы придемъ къ уравненію

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0, \tag{5}$$

которое и будетъ уравненіемъ касательной къ эллипсу (1) въ точкѣ $x_0\ y_0$ (точку эту мы будемъ обозначать черезъ π).

3. Согласно § 58, (8), отсюда получается слѣдующее уравненіе для прямой, перпендикулярной къ касательной:

$$\frac{xy_0}{b^2} - \frac{yx_0}{a^2} - d = 0, \tag{6}$$

гдѣ d — произвольная постоянная. Для того, чтобы этотъ перпендикуляръ проходилъ черезъ точку x_0, y_0, должно выполняться равенство $d = x_0 y_0(1/b^2 - 1/a^2)$, такъ что уравненіе (6) принимаетъ видъ:

$$\frac{(x - x_0) y_0}{b^2} - \frac{(y - y_0) x_0}{a^2} = 0. \qquad (7)$$

Эта прямая называется **нормалью** къ эллипсу въ точкѣ x_0, y_0. Она перпендикулярна къ касательной и проходитъ черезъ точку касанія.

4. Подъ **направленіемъ кривой линіи** въ нѣкоторой ея точкѣ разумѣютъ **направленіе касательной**. Кривая линія, такимъ образомъ, измѣняетъ свое направленіе при переходѣ отъ одной ея точки къ другой, въ то время какъ прямая во всѣхъ своихъ точкахъ имѣетъ одно и то же направленіе. Итакъ, **нормаль является перпендикулярной не только къ направленію касательной, но и къ направленію самой кривой.**

5. Если въ уравненіи (6) положить $d = 0$, то получимъ уравненіе перпендикуляра, опущеннаго на касательную изъ центра:

$$\frac{xy_0}{b^2} - \frac{yx_0}{a^2} = 0.$$

Большій интересъ представляетъ для насъ **перпендикуляръ, опущенный на касательную изъ фокуса**. Если положить

$$c^2 = a^2 - b^2, \qquad (8)$$

то фокусы f, f' имѣютъ, соотвѣтственно координаты $+c, 0$ и $-c, 0$; такимъ образомъ, уравненіе **перпендикуляра, опущеннаго на касательную изъ фокуса** f, имѣетъ видъ:

$$\frac{(x - c) y_0}{b^2} - \frac{yx_0}{a^2} = 0. \qquad (9)$$

Для того, чтобы получить координаты основанія π' этого перпендикуляра, опредѣляютъ величины x, y изъ уравненій (5) и (9).

6. Если мы теперь станемъ передвигать точку π вдоль эллипса, то, равнымъ образомъ, будетъ перемѣщатся и точка π' и опишетъ при этомъ нѣкоторую кривую, уравненіе которой мы сейчасъ опредѣлимъ. Мы должны будемъ для этого исключить x_0, y_0 изъ трехъ уравненій:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(x - c) y_0}{b^2} - \frac{yx_0}{a^2} = 0, \qquad (10)$$

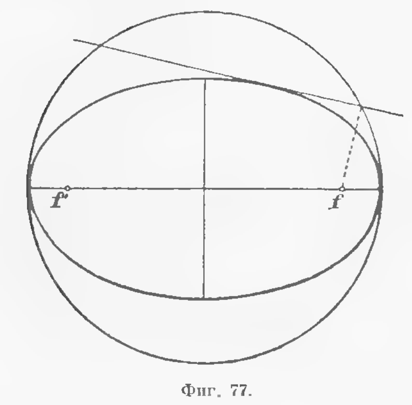
$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Для выполненія этого мы введемъ неопредѣленный множитель λ и, согласно второму изъ уравненій (10), положимъ:

$$\lambda \frac{x_0}{a^2} = x - c, \quad \lambda \frac{y_0}{b^2} = y.$$

Если подставить эти выраженія въ первое и третье равенства (10), то получимъ:

$$x(x - c) + y^2 = \lambda,$$
$$a^2(x - c)^2 + b^2 y^2 = \lambda^2.$$



Фиг. 77.

Возведемъ первое изъ этихъ равенствъ въ квадратъ и приравняемъ оба выраженія для λ^2; получимъ:

$$a^2(x - c)^2 + b^2 y^2 = (x(x - c) + y^2)^2.$$

Это равенство поддается значительному упрощенію. Именно, если положить

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

то получимъ:

$$r^4 - 2r^2 cx + c^2 x^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 - 2ca^2 x + a^2 c^2,$$

откуда, положивъ $b^2 = a^2 - c^2$, найдемъ:

$$r^4 - a^2 r^2 - 2cx(r^2 - a^2) + c^2(r^2 - a^2) = 0,$$

или

$$(r^2 - a^2)(r^2 - 2cx + c^2) = 0.$$

Но второй множитель

$$r^2 - 2cx + c^2 = (x - c)^2 + y^2$$

не можетъ быть равенъ нулю. Такимъ образомъ, $r^2 = a^2$, чѣмъ доказывается теорема:

Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса на касательныя къ эллипсу, лежатъ на нѣкоторой окружности.

Окружность эта имѣетъ тотъ же центръ, что эллипсъ, а діаметромъ ея является большая ось эллипса (фиг. 77).

7. Разсмотримъ двѣ прямыя, соединяющія точку π эллипса съ фокусами f, f'. Уравненіямъ обѣихъ прямыхъ должны удовлетворять значенія $x = x_0$, $y = y_0$ и, сверхъ того, первому изъ нихъ должны удовлетворять значенія $y = 0$, $x = +c$, а второму значенія $y = 0$, $x = -c$. Отсюда мы получаемъ и самыя уравненія:

$$\begin{aligned} y_0(x - x_0) - (y - y_0)(c + x_0) &= 0, \quad (\pi f'), \\ y_0(x - x_0) + (y - y_0)(c - x_0) &= 0, \quad (\pi f). \end{aligned} \tag{11}$$

Согласно § 58, 2, чтобы привести эти уравненія къ нормальному виду, нужно раздѣлить ихъ на корень квадратный изъ суммы квадратовъ коэффиціентовъ при x и при y, т. е. первое — на

$$r = \sqrt{(c + x_0)^2 + y_0^2},$$

а второе — на

$$r' = \sqrt{(c - x_0)^2 + y_0^2}.$$

При этомъ r и r' суть отрѣзки $f'\pi$ и $f\pi$ (какъ въ §§ 66 и 68, такъ что r лежитъ противъ фокуса f, r' — противъ фокуса f') и, по основному свойству эллипса,

$$\begin{aligned} r + r' &= 2a, \\ r - r' &= \frac{r^2 - r'^2}{r + r'} = \frac{2cx_0}{a}. \end{aligned} \tag{12}$$

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ нормальному виду уравненій (11):

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{y_0(x - x_0) - (y - y_0)(c + x_0)}{r} = 0, \\ A' &\equiv \frac{y_0(x - x_0) + (y - y_0)(c - x_0)}{r'} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

и, согласно § 58, 5, равенства

$$A' - A = 0, \quad A' + A = 0 \tag{14}$$

являются уравненіями обѣихъ биссектрисъ угловъ, образуемыхъ прямыми $f\pi$ и $f'\pi$.

Изъ тождествъ

$$A' - A \equiv \frac{y_0(x - x_0)(r - r') + (y - y_0)[c(r + r') - x_0(r - r')]}{rr'},$$

$$A' + A \equiv \frac{y_0(x - x_0)(r + r') + (y - y_0)[c(r - r') - x_0(r + r')]}{rr'}$$

съ помощью соотношеній (12) и (4) получимъ:

$$A' - A \equiv \frac{2cay_0}{rr'}\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right),$$

$$A' + A \equiv \frac{2b^2a}{rr'}\left[\frac{(x - x_0)y_0}{b^2} - \frac{(y - y_0)x_0}{a^2}\right].$$

Уравненія (14), такимъ образомъ, являются уравненіями касательной и нормали къ эллипсу, откуда вытекаетъ теорема:

Касательная и нормаль къ эллипсу дѣлятъ пополамъ углы между лучами, выходящими изъ фокусовъ и проходящими черезъ точку касанія.

§ 79. Геометрическое доказательство теоремы о касательной.

1. Послѣдняя теорема предыдущаго параграфа можетъ быть болѣе просто доказана безъ помощи уравненій, исходя изъ основного свойства эллипса.

Обозначимъ черезъ p и π двѣ точки нѣкотораго эллипса съ фокусами f, f' (фиг. 78). Линія, соединяющая точки p и π, является сѣкущей эллипса, а отрѣзокъ $\overline{\pi p}$, который мы обозначимъ черезъ s, есть хорда.

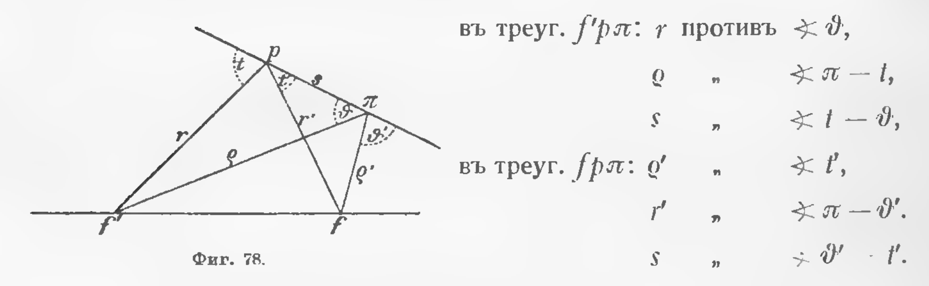
Мы положимъ

$$\overline{f'p} = r, \quad \overline{fp} = r', \quad \overline{p\pi} = s,$$
$$\overline{f'\pi} = \varrho, \quad \overline{f\pi} = \varrho';$$

изъ основного свойства эллипса вытекаетъ, что

$$r + r' = \varrho + \varrho' = 2a. \tag{1}$$

Въ треугольникахъ $f'p\pi$ и $fp\pi$ другъ противъ друга лежатъ, соотвѣтственно, слѣдующіе стороны и углы.



Фиг. 78.

въ треуг. $f'p\pi$: r противъ $\sphericalangle\, \vartheta$,
ϱ „ $\sphericalangle\, \pi - t$,
s „ $\sphericalangle\, t - \vartheta$,
въ треуг. $fp\pi$: ϱ' „ $\sphericalangle\, t'$,
r' „ $\sphericalangle\, \pi - \vartheta'$.
s „ $\sphericalangle\, \vartheta' - t'$.

Отсюда по теоремѣ синусовъ (§ 28, 2) получается:

$$\frac{r}{s} = \frac{\sin\vartheta}{\sin(t-\vartheta)}, \qquad \frac{\varrho}{s} = \frac{\sin t}{\sin(t-\vartheta)},$$
$$\frac{r'}{s} = \frac{\sin\vartheta'}{\sin(\vartheta'-t')}, \qquad \frac{\varrho'}{s} = \frac{\sin t'}{\sin(\vartheta'-t')};$$

слѣдовательно, согласно (1):

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin(t-\vartheta)} + \frac{\sin\vartheta'}{\sin(\vartheta'-t')} = \frac{\sin t}{\sin(t-\vartheta)} + \frac{\sin t'}{\sin(\vartheta'-t')},$$

или

$$\frac{\sin t - \sin\vartheta}{\sin(t-\vartheta)} = \frac{\sin\vartheta' - \sin t'}{\sin(\vartheta'-t')}.$$

Положимъ теперь, согласно тригонометрическимъ формуламъ (§ 29, (5), (6)),

$$\sin t - \sin\vartheta = 2\sin\frac{t-\vartheta}{2}\cos\frac{t+\vartheta}{2},$$

$$\sin(t-\vartheta) = 2\sin\frac{t-\vartheta}{2}\cos\frac{t-\vartheta}{2},$$

$$\sin\vartheta' - \sin t' = 2\sin\frac{\vartheta'-t'}{2}\cos\frac{\vartheta'+t'}{2},$$

$$\sin(\vartheta'-t') = 2\sin\frac{\vartheta'-t'}{2}\cos\frac{\vartheta'-t'}{2};$$

тогда, сокративъ числителя и знаменателя на $2\sin\frac{1}{2}(t-\vartheta)$ и на $2\sin\frac{1}{2}(\vartheta'-t')$, мы получимъ:

$$\frac{\cos\frac{t+\vartheta}{2}}{\cos\frac{t-\vartheta}{2}} = \frac{\cos\frac{\vartheta'+t'}{2}}{\cos\frac{\vartheta'-t'}{2}}. \qquad (2)$$

Теперь мы приведемъ точки p и π къ совпаденію въ нѣкоторой точкѣ на эллипсѣ. Тогда сѣкущая $p\pi$ станетъ касательной. Уголъ t станетъ равнымъ ϑ, t' — равнымъ ϑ'. Такимъ образомъ,

$$\cos\frac{t-\vartheta}{2} = 1, \qquad \cos\frac{\vartheta'-t'}{2} = 1,$$

$$\cos\frac{t+\vartheta}{2} = \cos\vartheta, \qquad \cos\frac{\vartheta'+t'}{2} = \cos\vartheta',$$

и равенство (2) приметъ видъ:

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta';$$

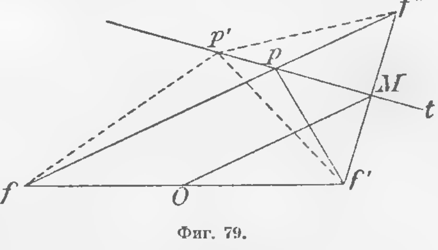
въ виду того, что углы ϑ, ϑ' лежатъ въ первомъ квадрантѣ, мы заключаемъ отсюда, что

$$\vartheta = \vartheta'.$$

Въ этомъ и состоитъ теорема, изложенная въ концѣ § 78.

2. Еще болѣе простымъ является слѣдующее косвенное доказательство (фиг. 79).

Обозначимъ черезъ f, f' фокусы эллипса, черезъ p — произвольную точку на немъ; тогда $fp + f'p = 2a$. Продолжимъ отрѣзокъ fp въ сторону точки p, отложимъ на продолженіи отрѣзокъ $f''p = f'p$ и раздѣлимъ уголъ $f'pf''$ пополамъ нѣкоторой прямой t. При этомъ, если бы прямая линія t имѣла



Фиг. 79.

съ эллипсомъ еще одну общую точку p', то должно было бы также выполняться равенство:

$$fp' + f'p' = fp' + f''p' = fpf'' = 2a,$$

что однако невозможно, такъ какъ въ треугольникѣ $fp'f''$ сторона ff'' меньше суммы двухъ другихъ. Такимъ образомъ, прямая t имѣетъ только одну общую точку съ эллипсомъ; такъ какъ для эллипса не существуетъ асимптотическаго направленія. то она служитъ, слѣдовательно, касательной.

Если обозначить черезъ O центръ эллипса и черезъ M — середину отрѣзка $f'f''$, то въ треугольникѣ $f'ff''$ линія OM соединяетъ середины двухъ сторонъ; слѣдовательно, $OM = \frac{1}{2}ff'' = a$, въ этомъ заключается новое доказательство теоремы § 78, 6.

3. Теорема п. 1-го указываетъ на свойство касательной къ эллипсу, съ которымъ связано происхожденіе названія фокусъ.

По закону оптики свѣтовой лучъ отъ зеркальной поверхности отражается такъ, что перпендикуляръ къ отражающей поверхности въ точкѣ отраженія (перпендикуляръ паденія) лежитъ въ одной плоскости съ падающимъ и отраженнымъ лучами и съ обоими образуетъ равные углы. Такимъ образомъ, если представимъ себѣ внутреннюю сторону периферіи эллипса въ качествѣ отражающей поверхности, то каждый лучъ, выходящій изъ одного фокуса, отражается по направленію къ другому фокусу, такъ что всѣ лучи, выходящіе изъ одного фокуса, собираются въ другомъ.

Это явленіе имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, если мы образуемъ нѣкоторую отражающую поверхность вращеніемъ эллипса вокругъ его главной оси. Эта поверхность, носящая названіе эллипсоида вращенія, равнымъ образомъ имѣетъ два фокуса и въ отношеніи къ нимъ обладаетъ въ пространствѣ тѣми же свойствами, что и эллипсъ въ плоскости; именно, сумма разстояній отъ обоихъ фокусовъ является постоянной величиной для всей поверхности.

Если одинъ изъ двухъ фокусовъ удаляется въ безконечность, то эллипсъ приближается къ параболѣ, и эллипсоидъ вращенія переходитъ въ параболоидъ вращенія. Такимъ образомъ мы приходимъ къ понятію о параболическомъ вогнутомъ зеркалѣ, обладающемъ тѣмъ свойствомъ, что лучи, падающіе параллельно его оси (напримѣръ, солнечные лучи), собираются въ одной точкѣ, именно — въ фокусѣ, гдѣ благодаря этому развивается сильный жаръ.

§ 80. Сопряженные діаметры.

1. Если черезъ центръ эллипса провести двѣ прямыя съ сопряженными направленіями, образующія другъ съ другомъ уголъ ω, и взять

эти прямыя за оси нѣкоторой косоугольной системы координатъ, то уравненіе эллипса, согласно § 77, приметъ видъ:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1. \tag{1}$$

Значенію $y=0$ отвѣчаютъ значенія $x=\pm\alpha$, а значенію $x=0$ — значенія $y=\pm\beta$. Отрѣзки AA', BB' (фиг. 80) называются сопряженными діаметрами. Длины ихъ выражаются числами 2α и 2β. Главныя оси представляютъ собою частный случай сопряженныхъ діаметровъ.

2. Если черезъ нѣкоторую точку P съ координатами x_0, y_0 провести линіи, параллельныя сопряженнымъ діаметрамъ, то получатся сопряженныя хорды. Каждая изъ этихъ двухъ хордъ точкой P дѣлится на два отрѣзка PQ_1, PQ_2; PP_1, PP_2 (фиг. 80).

Точки Q_1, Q_2 имѣютъ одну и ту же абсциссу x_0 и противоположныя по знаку ординаты $\pm y$, опредѣляемыя изъ уравненія

$$\frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1; \tag{2}$$

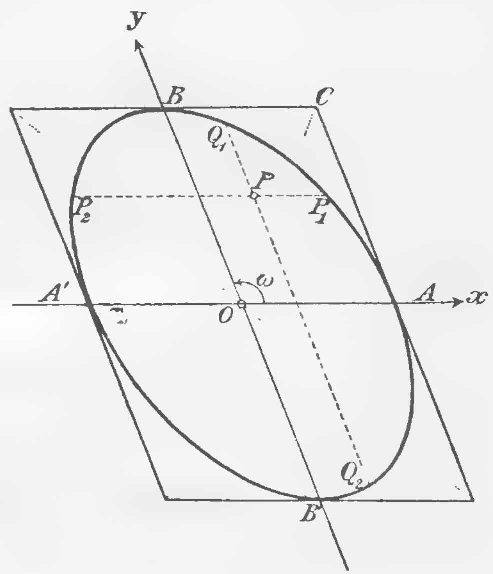
при этомъ $PQ_1=y-y_0$, $PQ_2=y+y_0$; слѣдовательно,

$$PQ_1\cdot PQ_2=y^2-y_0^2.$$

Такимъ же образомъ получаемъ соотношеніе:

$$PP_1\cdot PP_2=x^2-x_0^2,$$

гдѣ x опредѣляется изъ уравненія



Фиг. 80.

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y_0^2}{\beta^2}=1. \tag{3}$$

Изъ равенствъ (2) и (3) вычитаніемъ получаемъ:

$$\frac{x^2-x_0^2}{\alpha^2}=-\frac{y^2-y_0^2}{\beta^2},$$

или

$$PQ_1\cdot PQ_2:PP_1\cdot PP_2=\beta^2:\alpha^2; \tag{4}$$

такимъ образомъ, мы приходимъ, къ теоремѣ:

Сопряженныя хорды пересѣкаются такъ, что произведенія отсѣкаемыхъ на нихъ отрѣзковъ относятся, какъ квадраты діаметровъ, параллельныхъ хордамъ.

3. Для обѣихъ точекъ пересѣченія эллипса съ нѣкоторой прямой, параллельной оси y-овъ, согласно уравненію (1), имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$y = \pm \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}; \tag{5}$$

обѣ эти точки совпадаютъ, если $x = \pm \alpha$.

Отсюда вытекаетъ теорема:

Касательныя въ концахъ діаметра эллипса имѣютъ направленіе, сопряженное съ направленіемъ діаметра.

4. Дискриминантъ уравненія (1) опредѣляется рявенствомъ

$$\Delta = -\frac{1}{\alpha^2 \beta^2},$$

откуда, согласно § 76, 7, вытекаетъ, что произведеніе

$$\alpha\beta \sin\omega$$

есть величина, не зависящая отъ частнаго выбора сопряженныхъ направленій. Такъ какъ величина эта есть площадь параллелограмма $OACB$, то имѣетъ мѣсто теорема:

Площадь описаннаго вокругъ эллипса параллелограмма, стороны котораго имѣютъ сопряженныя направленія, есть величина постоянная, а именно, она равна площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ эллипса.

5. Постоянному значенію x, согласно (5), отвѣчаютъ два равныхъ по абсолютной величинѣ, но противоположныхъ по знаку значенія y. Это приводитъ насъ къ теоремѣ, содержащей теорему п. 3-го въ качествѣ частнаго случая:

Хорда эллипса дѣлится пополамъ діаметромъ, сопряженнымъ съ ея направленіемъ.

Отсюда вытекаютъ дальнѣйшія слѣдствія. Если въ уравненіи

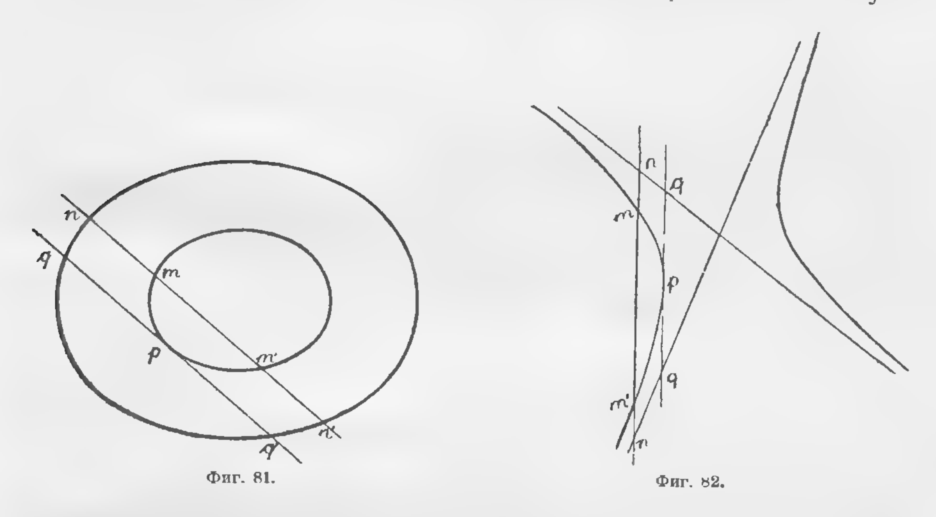
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \lambda \tag{6}$$

λ пробѣгаетъ рядъ различныхъ значеній, то оно представляетъ систему подобныхъ и сходственно расположенныхъ эллипсовъ, при чемъ всѣ кривыя этой системы имѣютъ одни и тѣ же сопряженныя направленія. Въ самомъ дѣлѣ, любую кривую этой системы мы можемъ получить,

если въ одной изъ этихъ кривыхъ координаты x, y увеличимъ въ отношеніи $\sqrt{\lambda}:1$. Кривыя системы отсѣкаютъ на пересѣкающей ихъ прямой хорды, и всѣ эти хорды дѣлятся пополамъ одной и той прямой.

Отсюда слѣдуетъ, что кольцо ограниченное двумя подобными и сходственно расположенными эллипсами отсѣкаетъ на каждой пересѣкающей его прямой два равныхъ отрѣзка; если, въ частности, эта прямая касается внутренняго края кольца, то оба отрѣзка, отсѣкаемые на касательной внѣшнимъ краемъ, равны между собой (фиг. 81, $\overline{mn} = \overline{m'n'}$, $\overline{pq} = \overline{pq'}$).

6. Аналогичная теорема имѣетъ мѣсто и въ отношеніи гиперболы. Нужно лишь въ уравненіи (6) замѣнить β^2 черезъ $-\beta^2$. Въ этомъ случаѣ



Фиг. 81. Фиг. 82.

уравненіе (6) для $\lambda = 0$ представитъ пару асимптотъ, которыя также принадлежатъ системѣ. Отсюда получается теорема:

Двѣ асимптоты гиперболы отсѣкаютъ на каждой касательной къ ней два равныхъ отрѣзка (фиг. 82, $\overline{pq} = \overline{pq'}$).

7. Уравненіе эллипса, отнесенное къ главнымъ осямъ, имѣетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Это уравненіе удовлетворяется тождественно, если положить:

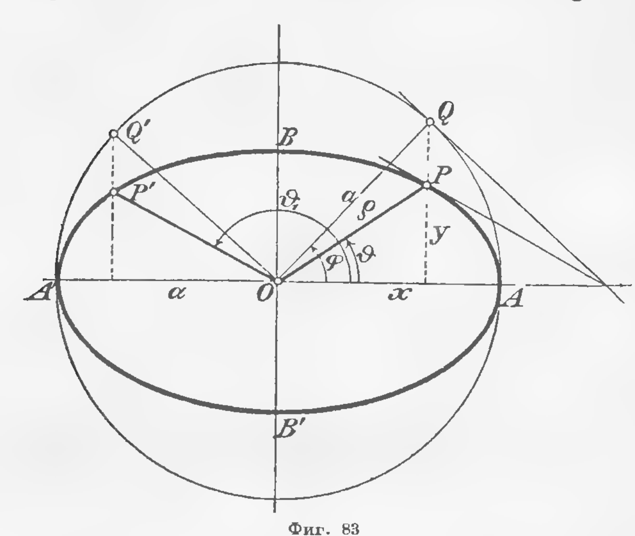
$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi, \\ y &= b\sin\varphi, \end{aligned} \tag{8}$$

гдѣ φ есть перемѣнный уголъ, который принимаетъ различныя значенія для различныхъ точекъ эллипса.

Геометрическое значеніе этого угла φ легко усмотрѣть (фиг. 83). Въ самомъ дѣлѣ, если P есть произвольная точка эллипса, а ϑ — уголъ, образуемый съ осью x-овъ радіусомъ-векторомъ OP ($= \varrho$), то

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \vartheta, \\ y &= \varrho \sin \vartheta. \end{aligned} \tag{9}$$

Если мы изъ точки P опустимъ перпендикуляръ на ось x-овъ и продолжимъ его до пересѣченія въ точкѣ Q съ описанной вокругъ эллипса окружностью радіуса a, то, означая черезъ φ уголъ, образуемый радіусомъ OQ съ осью x-овъ, получимъ, что $x = a \cos \varphi$, а изъ уравненія (7) будетъ вытекать, что $y = b \sin \varphi$. Если φ измѣняется отъ 0 до 2π, точка P обходитъ весь эллипсъ.



Фиг. 83

8. Введеніе угла φ является очень цѣлесообразнымъ, если рѣчь идетъ о нахожденіи сопряженныхъ діаметровъ эллипса, изъ коихъ одинъ имѣетъ произвольно заданное направленіе OP. Если обозначимъ сопряженные полудіаметры черезъ α, β, то уравненіе эллипса, отнесенное къ нимъ, какъ къ осямъ координатъ, имѣетъ видъ:

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1; \tag{10}$$

соотношенія между величинами α, β, a, b получатся изъ равенствъ (4) § 76-го, если замѣнить въ нихъ

$$a, \quad \beta, \quad \gamma', \quad a, \quad b, \quad c'$$

черезъ

$$\frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{1}{\beta^2}, \quad 0, \quad \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{b^2} \quad 0$$

и положить $\vartheta + \omega = \vartheta_1$; выполнивши подстановку, мы придемъ къ равенствамъ:

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2},$$
$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{\cos^2\vartheta_1}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta_1}{b^2}, \qquad (11)$$
$$0 = \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{a^2} + \frac{\sin\vartheta\sin\vartheta_1}{b^2}.$$

Если мы введемъ вмѣсто угловъ ϑ, ϑ_1 углы φ, φ_1 и, согласно равенствамъ (8) и (9), положимъ:

$$\alpha\cos\vartheta = a\cos\varphi, \quad \alpha\sin\vartheta = b\sin\varphi,$$
$$\beta\cos\vartheta_1 = a\cos\varphi_1, \quad \beta\sin\vartheta_1 = b\sin\varphi_1, \qquad (12)$$

то изъ послѣдняго соотношенія (11) вытекаетъ:

$$\cos\varphi\cos\varphi_1 + \sin\varphi\sin\varphi_1 = \cos(\varphi - \varphi_1) = 0,$$

откуда $\varphi_1 = \varphi + \frac{1}{2}\pi$. Такимъ образомъ, линіи OQ и OQ' взаимно перпендикулярны. Первыя два изъ равенствъ (11) выполняются при этомъ тождественно, и изъ соотношеній (12) слѣдуетъ далѣе:

$$\alpha\cos\vartheta = a\cos\varphi, \quad \alpha\sin\vartheta = b\sin\varphi,$$
$$\beta\cos\vartheta_1 = -a\sin\varphi, \quad \beta\sin\vartheta_1 = b\cos\varphi; \qquad (13)$$

$$\alpha\beta\sin\omega = ab, \quad \alpha\beta\cos\omega = -\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin 2\varphi,$$
$$\operatorname{cotg}\omega = -\frac{a^2 - b^2}{2ab}\sin 2\varphi, \qquad (14)$$

гдѣ $\omega = \vartheta_1 - \vartheta$ есть уголъ между сопряженными полудіаметрами. Такимъ образомъ, уголъ ω становится прямымъ, если $\varphi = 0$ и $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$; въ остальныхъ случаяхъ ω является тупымъ угломъ и достигаетъ наибольшаго значенія, когда $\varphi = \pi/4$.

Далѣе, мы имѣемъ:

$$\alpha^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$
$$\beta^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi, \qquad (15)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2. \qquad (16)$$

Эта формула выражаетъ теорему Аполлонія:

Сумма квадратовъ сопряженныхъ полудіаметровъ есть величина постоянная.

9. Изъ равенства (15) вытекаетъ еще:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^4 - b^4}{a^2(b^2 + a^2\operatorname{tg}^2\varphi)}. \qquad (17)$$

Если мы будемъ измѣнять φ отъ 0 до $\pi/2$, то $\operatorname{tg}\varphi$ будетъ непрерывно возрастать отъ 0 до безконечности, и отношеніе α^2/β^2, убывая, будетъ измѣняться отъ a^2/b^2 до b^2/a^2.

10. Изъ соотношеній (12), въ виду равенствъ $\cos\varphi = \sin\varphi_1$, $\sin\varphi = -\cos\varphi_1$, мы получаемъ также:

$$\begin{aligned}(a+b)\cos\varphi &= \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta_1,\\ (a+b)\sin\varphi &= \alpha\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta_1;\end{aligned} \qquad (18)$$

возводя въ квадратъ и складывая эти равенства находимъ:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\sin\omega\\ &= (\alpha+\beta)^2 - 2\,\alpha\beta(1-\sin\omega).\end{aligned}$$

Такъ какъ $1-\sin\omega$ всегда есть положительное число, то отсюда вытекаетъ:

Сумма двухъ сопряженныхъ діаметровъ больше суммы осей.

Точно такъ же:

$$(a-b)^2 = (\alpha-\beta)^2 + 2\alpha\beta(1-\sin\omega),$$

откуда слѣдуетъ, что $(a-b)^2$ больше, чѣмъ $(\alpha-\beta)^2$, и величина $(\alpha-\beta)^2$ достигаетъ своего наименьшаго значенія, равнаго нулю, когда $\varphi = \pi/4$.

Эти теоремы и предложенія, аналогичныя имъ, находятся въ 7-ой книгѣ „Коническихъ сѣченій“ Аполлонія.

§ 81. Окружность кривизны.

1. Два коническихъ сѣченія, какъ мы видѣли выше, имѣютъ четыре общихъ точки. Но черезъ однѣ и тѣ же четыре точки проходитъ цѣлый рядъ кривыхъ, совокупность которыхъноситъ названіе пучка коническихъ сѣченій. Четыре точки, общихъ всѣмъ кривымъ пучка, называются основными точками пучка. Если два коническихъ сѣченія изъ разсматриваемаго пучка выражаются уравненіями $f=0$, $\varphi=0$ и λ есть постоянная величина, то равенство

$$f + \lambda\varphi = 0 \qquad (1)$$

является уравненіемъ нѣкотораго коническаго сѣченія, принадлежащаго пучку, ибо оно выполняется, когда f и φ одновременно обращаются въ нуль, т. е. въ четырехъ точкахъ пересѣченія кривыхъ f и φ.

Если мы вообразимъ себѣ одно изъ двухъ коническихъ сѣченій f и φ неизмѣняющимся, а другое — перемѣннымъ, то мы можемъ допустить, что двѣ изъ ихъ точекъ пересѣченія совпали въ одну. Тогда оба коническихъ сѣченія въ этой точкѣ имѣютъ общую касательную, и относи-

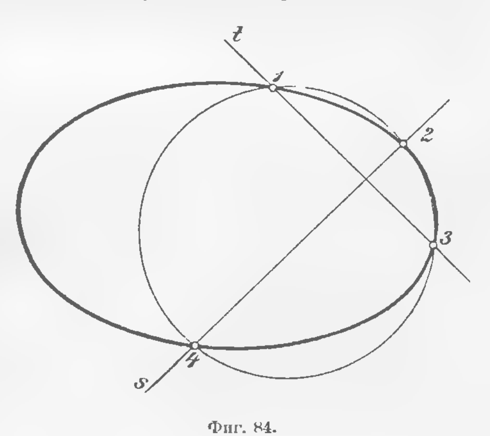
тельно самихъ коническихъ сѣченій говорятъ, что они имѣютъ въ этой точкѣ касаніе. Всѣ коническія сѣченія пучка касаются другъ друга въ этой точкѣ.

2. Двѣ другія точки пересѣченія, могутъ такимъ же образомъ, совпасть; тогда получаются коническія сѣченія, которыя касаются другъ друга въ двухъ различныхъ точкахъ: вдвойнѣ касающіяся коническія сѣченія имѣютъ двойное касаніе.

3. Можетъ также случиться, что три точки пересѣченія совпадають въ одну, между тѣмъ какъ четвертая лежитъ отдѣльно. Тогда въ точкѣ совпаденія имѣетъ мѣсто болѣе тѣсное касаніе, которое носитъ названіе касанія второго порядка, соприкосновенія или трехточечнаго касанія.

Наконецъ, и всѣ четыре точки пересѣченія могутъ совпасть въ одну. Тогда получается касаніе третьяго порядка или четырехточечное касаніе.

4. Среди всѣхъ коническихъ сѣченій, которыя имѣютъ съ даннымъ коническимъ сѣченіемъ въ нѣкоторой данной точкѣ π трехточечное касаніе, находится одна и только одна окружность, такъ какъ окружность вполнѣ опредѣляется тремя точками. Эта окружности пересѣчетъ данное коническое сѣченіе еще и въ четвертой точкѣ. Она носитъ названіе окружности кривизны коническаго сѣченія въ точкѣ π; коническому сѣченію въ точкѣ π приписываютъ такую же кривизну, какую имѣетъ эта окружность. Такъ какъ, очевидно, окружность тѣмъ болѣе изогнута, чѣмъ меньше радіусъ, то за мѣру кривизны, принимаютъ величину, обратную радіусу окружности кривизны. Этотъ радіусъ называется вслѣдствіе этого радіусомъ кривизны, а центръ окружности кривизни — центромъ кривизны коническаго сѣченія въ точкѣ π.



Фиг. 84.

Въ отдѣльныхъ точкахъ (въ вершинахъ коническаго сѣченія) окружность кривизны можетъ имѣть съ коническимъ сѣченіемъ четырехточечное касаніе.

5. Относительно положенія окружности кривизны мы замѣтимъ слѣдующее: возьмемъ прежде всего на нѣкоторомъ коническимъ сѣченіи, - напримѣръ, на эллипсѣ, — три не совпадающія точки 1, 2, 3. Этими точками опредѣляется одна окружность, и если эта окружность въ точкѣ 1 выходитъ

изъ эллипса, то въ точкѣ 2 она обратно входитъ въ эллипсъ, а въ точкѣ 3 вторично выходитъ изъ него (фиг 84). Если теперь мы заставимъ эти точки совпасть въ точкѣ π, то окружность перейдетъ въ окружность кривизны, которая, такимъ образомъ, касаясь эллипса, въ то время переходитъ съ одной стороны его на другую. Она, напримѣръ, въ точкѣ π выходитъ изъ эллипса и въ четвертой точкѣ пересѣченія снова входитъ внутрь эллипса (фиг. 85). Исключеніе представляется только въ точкахъ касанія третьяго порядка, въ которыхъ кругъ кривизны либо цѣликомъ расположенъ внутри эллипса, либо—внѣ его.

6. При аналитическомъ опредѣленіи окружности кривизны мы ограничимся случаемъ эллипса, уравненіе котораго мы отнесемъ къ главнымъ осямъ и возьмемъ въ видѣ:

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (2)$$

при чемъ система координатъ прямоугольная.

Возьмемъ на этомъ эллипсѣ три не совпадающія точки 1, 2, 3, соединимъ точки 1, 3 прямою t и проведемъ затѣмъ черезъ точку 2 вторую прямую s, которая пересѣкаетъ эллипсъ въ нѣкоторой четвертой точкѣ 4. Эти двѣ прямыя мы будемъ разсматривать, какъ пару линій (распадающееся коническое сѣченіе); и если $t = 0$, $s = 0$ суть уравненія этихъ прямыхъ, то уравненіе

$$E + \lambda s t = 0 \qquad (3)$$

характеризуетъ пучокъ, для котораго точки 1, 2, 3, 4 являются основными. Въ этомъ пучкѣ окружность содержится лишь въ томъ случаѣ, если точка 4 является четвертой точкой пересѣченія кривой съ окружностью, проходящей черезъ точки 1, 2, 3.

7. Если, далѣе, три точки 1, 2, 3 совпадаютъ въ нѣкоторой точкѣ π (съ координатами x_0, y_0), то прямая t становится касательной въ этой точкѣ, а s сѣкущей, проходящей черезъ точку π.

Мы можемъ поэтому положить:

$$t \equiv \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} - 1,$$

$$s \equiv \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0),$$

гдѣ черезъ α, β обозначены неопредѣленные коэффиціенты, отношеніе которыхъ опредѣляется точкой 4.

Такимъ образомъ, даже если точка 4 дана, остается неопредѣленнымъ нѣкоторый общій множитель чиселъ α, β; поэтому мы можемъ замѣнить въ уравненіи (3) $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$ черезъ α, β и представить его въ видѣ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$$
$$+\left(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)\right)\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right)=0. \qquad (4)$$

Если мы оставляемъ оба коэффиціента α, β неопредѣленными, то остается неопредѣленною и точка 4, такъ что уравненіе (4) представляетъ совокупность коническихъ сѣченій, соприкасающихся другъ съ другомъ въ точкѣ π. Въ ихъ числѣ находится и окружность кривизны.

8. Для того, чтобы найти ее, мы опредѣлимъ коэффиціенты α, β такъ, чтобы уравненіе (4) приняло видъ уравненія окружности. Для этого необходимо и достаточно, чтобы въ уравненіе (4) не входило произведеніе xy, и чтобы коэффиціенты при x^2 и y^2 были равны (§ 62, (2)) условія эти приводятъ къ уравненіямъ:

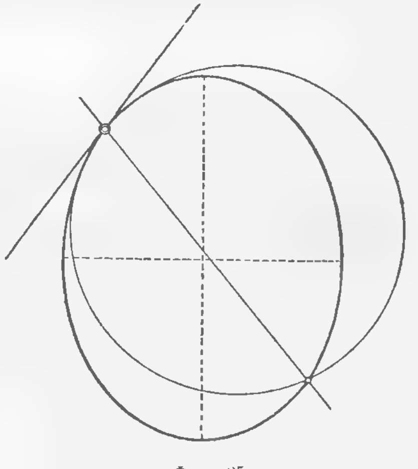
$$\frac{\alpha y_0}{b^2}+\frac{\beta x_0}{a^2}=0,$$
$$\frac{1+\alpha x_0}{a^2}=\frac{1+\beta y_0}{b^2} \qquad (5)$$

Первымъ изъ нихъ опредѣляется отношеніе $\alpha:\beta$; или, обозначая черезъ λ неопредѣленный покамѣстъ множитель, имѣемъ:

$$\alpha=\frac{\lambda x_0}{a^2}, \quad \beta=-\frac{\lambda y_0}{b^2}; \qquad (6)$$

уравненіе линіи s можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}.$$



Фиг. 85.

9. Этого результата уже достаточно для того, чтобы съ помощью даннаго эллипса построить вторую точку пересѣченія 4 кривой s съ эллипсомъ и самую окружность кривизны, если ни одна изъ координатъ x_0, y_0 не исчезаетъ, т. е. если точка π не является какою-либо изъ вершинъ кривой. Дѣйствительно, въ уравненіяхъ прямыхъ t и s коэффиціенты при x и y отличаются только знакомъ одного изъ нихъ, такъ что прямая s образуетъ съ осью x-овъ уголъ, отличающійся лишь знакомъ отъ угла прямой t. Такъ какъ, кромѣ того, эта прямая проходитъ черезъ точку π, то послѣдняя можетъ быть непосредственно построена, а затѣмъ остается провести окружность, касающуюся t въ точкѣ π и проходящую черезъ очку 4 (фиг. 85).

10. Для аналитическаго опредѣленія окружности кривизны, опредѣляютъ величину λ, подставляя выраженія (6) во второе изъ равенствъ (5); если при этомъ положимъ для краткости

$$\sigma = \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}, \tag{7}$$

$$a^2 - b^2 = c^2, \tag{8}$$

то получимъ:

$$\lambda = \frac{c^2}{a^2 b^2 \sigma},$$

$$\alpha = \frac{c^2 x_0}{a^4 b^2 \sigma}, \quad \beta = \frac{c^2 y_0}{a^2 b^4 \sigma}; \tag{9}$$

слѣдовательно,

$$\frac{1 + \alpha x_0}{a^2} = \frac{1}{a^2 b^2 \sigma}\left[b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right) + \frac{a^2 - b^2}{a^4} x_0^2\right],$$

откуда, пользуясь равенствомъ

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

получаемъ:

$$\frac{1 + \alpha x_0}{a^2} = \frac{1 + \beta y_0}{b^2} = \frac{1}{a^2 b^2 \sigma};$$

далѣе:

$$\alpha x_0 + \beta y_0 = \lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right) = \frac{c^2}{a^2 b^2 \sigma}\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right).$$

Отсюда уравненіе (4) окружности кривизны принимаетъ видъ:

$$\frac{1}{a^2 b^2 \sigma}(x^2 + y^2) - x\left[\alpha + \frac{x_0}{a^2}(\alpha x_0 + \beta y_0)\right]$$
$$- y\left[\beta + \frac{y_0}{b^2}(\alpha x_0 + \beta y_0)\right] + \alpha x_0 + \beta y_0 - 1 = 0,$$

или, наконецъ, если воспользоваться еще разъ уравненіемъ эллипса:

$$\frac{1}{a^2 b^2 \sigma}\left[x^2 + y^2 - \frac{2 c^2 x x_0^3}{a^4} + \frac{2 c^2 y y_0^3}{b^4} + \frac{c^2 x_0^2}{a^2} - \frac{c^2 y_0^2}{b^2} - a^2 b^2 \sigma\right] = 0. \tag{10}$$

Если координаты центра кривизны обозначить черезъ ξ, η, радіусъ кривизны — черезъ ϱ, то это уравненіе, по освобожденіи отъ множителя $\frac{1}{a^2 b^2 \sigma}$, можетъ быть представлено въ видѣ:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \varrho^2, \tag{11}$$

приравнявъ коэффиціенты при первыхъ степеняхъ x и y въ уравненіяхъ (10) и (11), получимъ:

$$\xi = \frac{c^2 x_0^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{c^2 y_0^3}{b^4}. \qquad (12)$$

Такъ какъ точка x_0, y_0 лежитъ на окружности (11), то

$$\varrho^2 = (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2,$$

а изъ равенства (12) вытекаетъ:

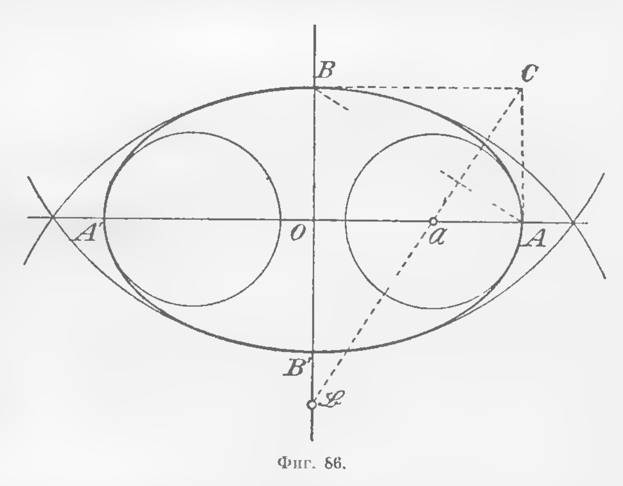
$$x_0 - \xi = b^2 x_0 \sigma,$$
$$y_0 - \eta = a^2 y_0 \sigma,$$

откуда

$$\varrho^2 = a^4 b^4 \sigma^3. \qquad (13)$$

Знаки правыхъ частей въ равенствахъ (12) обнаруживаютъ, что, когда точка π лежитъ въ первомъ квадрантѣ, центръ кривизны лежитъ въ четвертомъ квадрантѣ.

11. Теперь легко ужъ построить центры кривизны для вершинъ, которыя мы выше исключили изъ разсмотрѣнія (фиг. 86). Согласно равенствамъ (12), искомыя точки $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ имѣютъ координаты $\xi = c^2/a$, $\eta = 0$; $\xi = 0$, $\eta = -c^2/b$. Построимъ прямоугольникъ $OACB$ со сторонами a, b, и опустимъ на прямую AB перпендикуляръ $C\mathfrak{A}\mathfrak{B}$; этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ оси въ искомыхъ точкахъ $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$. Дѣйствительно, напримѣръ, для точки $\mathfrak{A}$, если положить $O\mathfrak{A} = \xi$, изъ подобныхъ треугольниковъ $\mathfrak{A}CA$ и ABC получимъ: $(a - \xi) : b = b : a$, откуда $\xi = (a^2 - b^2)/a = c^2/a$; подобнымъ же образомъ найдемъ, что $\eta = -O\mathfrak{B}$.

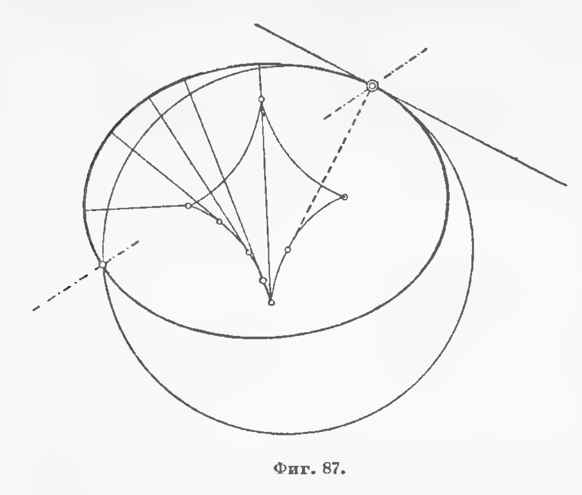


Фиг. 86.

12. Изъ равенствъ (12) можно вывести слѣдующія:

$$\frac{x_0}{a} = \left(\frac{a\,\xi}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{y_0}{b} = -\left(\frac{b\,\eta}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}};$$

если возвысимъ ихъ въ квадратъ и сложимъ, а затѣмъ примемъ во вниманіе, что x_0, y_0 удовлетворяютъ уравненію эллипса, то получимъ:



Фиг. 87.

$$\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \quad (14)$$

Это уравненіе не зависитъ отъ x_0, y_0, такъ что ему удовлетворяютъ всѣ центры кривизны эллипса; если разсматривать величины ξ, η, какъ координаты перемѣнной точки, то равенство (14) является уравненіемъ нѣкоторой кривой, называемой **развѳрткой эллипса**. Фигура 87 приблизительно изображаетъ ея форму.

13. Уравненіе (14) имѣетъ ирраціональный видъ, такъ какъ содержитъ кубическіе корни. Для того, чтобы освободиться отъ нихъ, возведемъ прежде всего обѣ части уравненія въ третью степень:

$$\frac{a^2\xi^2}{c^4} + \frac{b^2\eta^2}{c^4} + 3\left(\frac{ab^2\xi\eta^2}{c^6}\right)^{\frac{2}{3}} + 3\left(\frac{a^2b\xi^2\eta}{c^6}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Но, согласно равенству (14), имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$\left(\frac{ab^2\xi\eta^2}{c^6}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{a^2b\xi^2\eta}{c^6}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{ab\xi\eta}{c^4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{ab\xi\eta}{c^4}\right)^{\frac{2}{3}};$$

слѣдовательно, наше равенство можетъ быть преобразовано такъ:

$$3\left(\frac{ab\xi\eta}{c^4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{a^2\xi^2}{c^4} - \frac{b^2\eta^2}{c^4};$$

возведя обѣ части его въ третью степень, получимъ:

$$\left(\frac{a^2\xi^2}{c^4} + \frac{b^2\eta^2}{c^4} - 1\right)^3 + \frac{27a^2b^2\xi^2\eta^2}{c^8} = 0. \quad (15)$$

Это уравненіе не содержитъ уже знаковъ извлеченія корня. Выполнивъ въ лѣвой его части возвышеніе въ кубъ, можно расположить его по степенямъ ξ и η, но мы этого дѣлать не станемъ Для $\xi = 0$, $\eta = 0$ лѣвая часть уравненія (15) принимаетъ отрицательное значеніе, для доста-

точно же большихъ значеній ξ, η — положительное. Отсюда мы заключаемъ, что лѣвая часть уравненія (15) имѣетъ отрицательное или положительное значеніе въ зависимости отъ того, лежитъ ли точка ξ, η внутри развертки или внѣ ея.

§ 82. Касательныя и нормали, выходящія изъ данной точки.

1. Если данъ эллипсъ

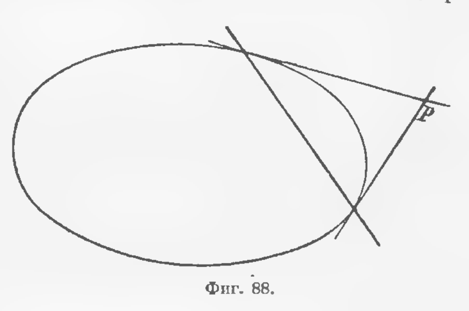
$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{1}$$

и произвольная точка p съ координатами ξ, η, то можно поставить себѣ задачу — провести касательную къ эллипсу, проходяшую черезъ точку p.

Если обозначить черезъ x_0, y_0 координаты искомой точки касанія, то уравненію касательной въ этой точкѣ

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$

должны удовлетворять координаты точки p, т. е. должно имѣть мѣсто равенство



Фиг. 88.

$$\frac{\xi x_0}{a^2} + \frac{\eta y_0}{b^2} - 1 = 0.$$

Такимъ образомъ, если мы черезъ x, y снова обозначимъ перемѣнныя координаты, то уравненіе прямой

$$P \equiv \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - 1 = 0 \tag{2}$$

должно выполняться для точки x_0, y_0. Но прямая эта пересѣкаетъ эллипсъ въ двухъ точкахъ, слѣдовательно; существуютъ двѣ касательныя къ эллипсу, проходящія черезъ точку p.

2. Прямая линія P называется полярой точки p относительно коническаго сѣченія E.

Ее можно легко построить, не пользуясь при этомъ эллипсомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если выраженіе P представить въ видѣ

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0,$$

то непосредственно ясно, что величины $\alpha = a^2 : \xi$, $\beta = b^2 : \eta$ представляютъ собою длины отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ прямою P на обѣихъ осяхъ. Такимъ образомъ, для того, чтобы, напримѣръ, получить α, нужно по данному

квадрату a^2 построить равновеликій ему прямоугольникъ, одна изъ сторонъ котораго имѣла бы данную длину ξ.

3. Обѣ точки пересѣченія прямой P съ коническимъ сѣченіемъ E могутъ быть вещественными или мнимыми. Въ послѣднемъ случаѣ не существуетъ вовсе касательныхъ, проходящихъ черезъ точку p; простое созерцаніе показываетъ, что это имѣетъ мѣсто, если точка p лежитъ внутри элипса. Если же точка p лежитъ на самомъ эллипсѣ, то поляра переходитъ въ касательную, т. е. обѣ точки пересѣченія ея съ эллипсомъ совпадаютъ.

Этотъ результатъ, полученный непосредственнымъ созерцаніемъ, легко можетъ быть найдемъ и аналитическимъ путемъ, если вычислить дискриминантъ квадратнаго уравненія, которое получается исключеніемъ одной изъ неизвѣстныхъ x, y изъ двухъ уравненій (1) и (2). Но мы не будемъ здѣсь заниматься этими изслѣдованіями.

4. Для того, чтобы получить уравненія касательныхъ, которыя можно провести къ эллипсу изъ точки p съ координатами ξ, η, разсмотримъ пучокъ

$$E - \lambda P^2 = 0, \qquad (3)$$

кривыя котораго всѣ касаются другъ друга въ точкахъ пересѣченія E и P. Если опредѣлить значеніе параметра λ такъ, чтобы кривая (3) проходила черезъ точку p, то получимъ распадающееся коническое сѣченіе, именно пару касательныхъ (проходящихъ черезъ p). Если черезъ E_0 и P_0 обозначить значенія выраженій E и P въ точкѣ p, то согласно равенству (2) $E_0 = P_0$, и уравненіе пары касательныхъ (3) можетъ быть написано такъ:

$$EE_0 - P^2 = 0, \qquad (4)$$

что въ развернутомъ видѣ даетъ:

$$\frac{(x\eta - y\xi)^2}{a^2 b^2} - \frac{(x - \xi)^2}{a^2} - \frac{(y - \eta)^2}{b^2} = 0,$$

или

$$\frac{((x - \xi)\eta - (y - \eta)\xi)^2}{a^2 b^2} - \frac{(x - \xi)^2}{a^2} - \frac{(y - \eta)^2}{b^2} = 0.$$

Для того, чтобы получить отсюда уравненія самыхъ касательныхъ, нужно разрѣшить еще квадратное уравненіе. Послѣднее мы найдемъ, положивъ

$$y - \eta = t(x - \xi); \qquad (5)$$

t, такимъ образомъ, является тангенсомъ угла, образуемаго искомой касательной съ осью x-овъ (§ 58, 3). Для t получается квадратное уравненіе

$$\frac{(\eta - t\xi)^2}{a^2 b^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{t^2}{b^2}\right) = 0,$$

или

$$t^2(\xi^2 - a^2) - 2t\xi\eta + (\eta^2 - b^2) = 0.$$

Если черезъ t_1, t_2 обозначить корни этого уравненія, то (томъ I, § 50)

$$t_1 t_2 = \frac{\eta^2 - b^2}{\xi^2 - a^2}.$$

Условіемъ того, чтобы обѣ касательныя были взаимно перпендикулярны, является равенство $t_1 t_2 = -1$, или

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 + b^2. \qquad (6)$$

Если мы будемъ разсматривать величины ξ, η, какъ перемѣнныя координаты, то это равенство представитъ собою уравненіе окружности, чѣмъ доказывается теорема:

Если прямой уголъ передвигается такъ, что стороны его постоянно касаются нѣкотораго эллипса съ главными полуосями a, b, то вершина угла описываетъ концентрическую съ эллипсомъ окружность радіуса $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Аналогичная теорема имѣетъ мѣсто и для гиперболы; но въ этомъ случаѣ радіусъ окружности равенъ $\sqrt{a^2 - b^2}$, такъ что онъ является вещественнымъ только въ томъ случаѣ, если $a > b$, т. е. если асимптоты гиперболы образуютъ острый уголъ.

5. Задача о нормали. Требуется изъ данной точки p съ координатами ξ, η провести прямолинейный отрѣзокъ къ нѣкоторой искомой точкѣ π даннаго эллипса такъ, чтобы этотъ отрѣзокъ въ точкѣ π былъ перпендикуляренъ къ эллипсу, т. е. служилъ бы **нормалью**.

Если x, y суть координаты точки π, то онѣ прежде всего должны удовлетворять уравненію (1) даннаго эллипса:

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

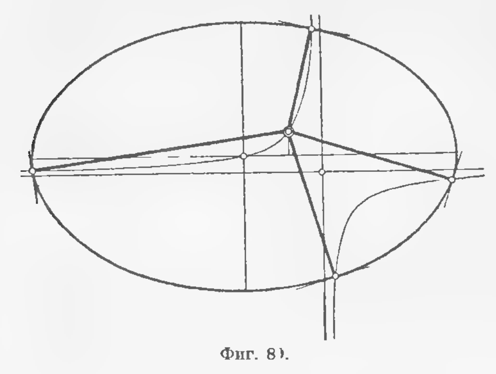
съ другой же стороны, согласно уравненію нормали въ точкѣ x, y (§ 78, (7)), которое должно выполняться въ точкѣ ξ, η, имѣетъ мѣсто равенство:

$$F \equiv \frac{(\xi - x)y}{b^2} - \frac{(\eta - y)x}{a^2} = 0. \qquad (7)$$

Искомая точка или (если ихъ есть нѣсколько) искомыя точки, такимъ образомъ, являются точками пересѣченія двухъ кривыхъ $E = 0$, $F = 0$; а, такъ какъ обѣ эти кривыя суть коническія сѣченія,

то существуютъ четыре нормали, проходящія черезъ данную точку p (фиг. 89).

6. Кривая $E = 0$ есть данный эллипсъ. Кривая же $F = 0$ является равносторонней гиперболой, проходящей черезъ точку $x = 0$, $y = 0$, т. е. черезъ центръ эллипса E, и черезъ точку $x = \xi$, $y = \eta$, т. е. черезъ данную точку p. Оси координатъ относительно этой гиперболы имѣютъ асимптотическое направленіе.


Фиг. 89.

Уравненіе гиперболы F можетъ быть переписано въ видѣ:

$$f \equiv xy + \frac{b^2 x \eta}{c^2} - \frac{a^2 y \xi}{c^2} = 0, \quad (8)$$

гдѣ $c^2 = a^2 - b^2$. Если представить уравненіе $f = 0$ въ видѣ

$$(x - \alpha)(y - \beta) - \alpha\beta = 0,$$

то α, β будутъ координатами центра гиперболы, для которыхъ получаемъ значенія:

$$\alpha = \frac{a^2 \xi}{c^2}, \quad \beta = -\frac{b^2 \eta}{c^2}.$$

Такимъ образомъ, если точка p лежитъ въ первомъ квадрантѣ, то точка α, β лежитъ въ четвертомъ квадрантѣ, и α всегда больше ξ.

Та вѣтвь гиперболы F, которая проходитъ черезъ центръ эллипса, должна выйти изъ эллипса въ двухъ точкахъ, изъ коихъ одна лежитъ въ первомъ квадрантѣ, а другая — въ третьемъ; вторая же вѣтвь, въ зависимости отъ положенія точки p, можетъ либо встрѣтить эллипсъ въ двухъ точкахъ, либо касаться его въ одной точкѣ, либо же пройти внѣ эллипса, вовсе съ нимъ не пересѣкаясь.

Черезъ точку p (лежащую въ первомъ квадрантѣ) проходятъ, такимъ образомъ, двѣ дѣйствительныя нормали, основанія которыхъ лежатъ въ первомъ и въ третьемъ квадрантахъ.

Существуютъ также еще двѣ другихъ нормали, которыя, однако, могутъ совпадать или быть мнимыми; въ томъ случаѣ, когда онѣ дѣйствительны, ихъ основанія лежатъ въ четвертомъ квадрантѣ.

7. Для того, чтобы отличить, какой изъ этихъ трехъ случаевъ имѣетъ мѣсто, мы должны изслѣдовать уравненіе 4-ой степени, отъ котораго зависятъ основанія нормалей.

Это уравненіе 4-ой степени всегда имѣетъ два вещественныхъ корня. Два другихъ могутъ быть либо вещественными, либо мнимыми.

Если вмѣсто биквадратнаго уравненія мы возьмемъ его кубическую резольвенту (томъ I, § 87 и 88.), то эта послѣдняя въ первомъ случаѣ имѣетъ три вещественныхъ корня, а во второмъ — одинъ вещественный и два сопряженныхъ мнимыхъ корня.

8. Въ качествѣ кубической резольвенты мы, естественно, выбираемъ уравненіе, отъ котораго зависятъ три пары прямыхъ, проходящія черезъ четыре основанія. Всѣ эти прямыя дѣйствительны, если всѣ четыре основанія дѣйствительны. Если же два основанія являются сопряженными мнимыми точками, то одна пара прямыхъ дѣйствительная, двѣ другія — мнимыя. Наконецъ, если два изъ основаній 1, 2, 3, 4, — напримѣръ, 3 и 4, — совпадаютъ, то двѣ пары прямыхъ также совпадаютъ въ одну, а именно — въ пару $\overline{31}$, $\overline{32}$. Другая же пара состоитъ изъ прямой 12 и касательной въ точкѣ 3.

Если 3, 4 суть сопряженныя мнимыя точки, то прямая, ихъ соединяющая, дѣйствительна, но пересѣкаетъ эллипсъ въ мнимыхъ точкахъ. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ пару дѣйствительныхъ прямыхъ 12, 34. Пары $\overline{13}$, 24 и 14, 23 состоятъ изъ мнимыхъ сопряженныхъ прямыхъ.

9. Такимъ образомъ, мы должны теперь изслѣдовать пары прямыхъ, содержащіяся въ пучкѣ коническихъ сѣченій

$$2f + \lambda E = 0$$

(томъ I, § 90). Уравненіе этого пучка въ развернутомъ видѣ представляется такъ:

$$\lambda\frac{x^2}{a^2} + \lambda\frac{y^2}{b^2} + 2xy + 2\frac{b^2 x\eta}{c^2} - \frac{2a^2 y\xi}{c^2} - \lambda = 0,$$

и оно выражаетъ, согласно § 74, пару прямыхъ, если опредѣлитель

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a^2}, & 1, & \frac{b^2\eta}{c^2} \\ 1, & \frac{\lambda}{b^2}, & \frac{a^2\xi}{c^2} \\ \frac{b^2\eta}{c^2}, & \frac{-a^2\xi}{c^2}, & -\lambda \end{vmatrix}$$

равенъ нулю. Отсюда для λ получается кубическое уравненіе:

$$\frac{\lambda^3}{a^2b^2} + \lambda\left(\frac{a^2\xi^2}{c^4} + \frac{b^2\eta^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2a^2b^2\xi\eta}{c^4} = 0,$$

или же, если раздѣлить его на ab и положить $\lambda : ab = u$:

$$u^3 + u\left(\frac{a^2\xi^2}{c^4} + \frac{b^2\eta^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2ab\xi\eta}{c^4} = 0. \qquad (5)$$

Теперь легко составить дискриминантъ этого уравненія.

Согласно §§ 83, 85 тома I, относительно вещественности корней этого уравненія нужно различать слѣдующіе случаи:

если $\left(\frac{a^2\xi^2}{c^4} + \frac{b^2\eta^2}{c^4} - 1\right)^3 + 27\frac{a^2b^2\xi^2\eta^2}{c^8}$ < 0: три вещественныхъ корня,
$= 0$: два равныхъ корня,
> 0: одинъ вещественный корень.

Но выраженіе, знакъ котораго здѣсь принимается во вниманіе, въ точности представляетъ собою лѣвую часть уравненія эволюты, которая, согласно § 81, 13, для точекъ внутри эволюты имѣетъ отрицательныя значенія, а для точекъ внѣ ея положительныя: такимъ образомъ, нами доказано предложеніе:

Изъ точки, лежащей внутри эволюты, исходятъ четыре нормали къ эллипсу, изъ точки на эволютѣ — три нормали, а изъ точки, лежащей внѣ эволюты, — только двѣ.

§ 83. Аналитическая сферика.

1. Изслѣдованія первой и четвертой частей сферической тригонометріи неоднократно давали возможность усмотрѣть далеко проникающую аналогію между сферикой и планиметріей. Вопросъ теперь заключается въ томъ, можетъ ли эта аналогія быть выведена аналитически.

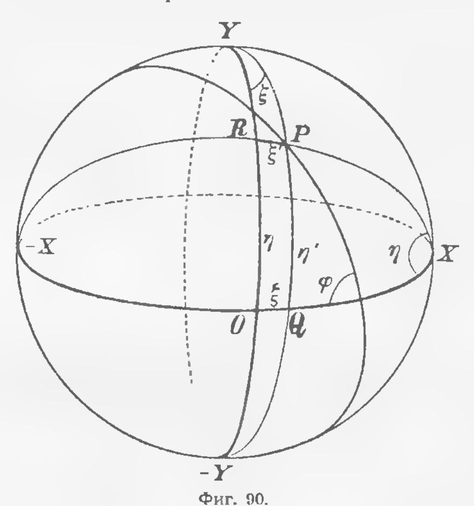
И дѣйствительно, при искусномъ выборѣ системы координатъ получается поразительное совпаденіе формулъ аналитической геометріи на плоскости и соотвѣтствующихъ формулъ „аналитической сферики“, особенно если каждыя двѣ противоположныя точки шара разсматривать, какъ одну „точку“ (ср. § 10, 2). Аналитическая сферика является въ этомъ случаѣ точнымъ воспроизведеніемъ аналитической геометріи на плоскости.

Въ послѣдующемъ радіусъ шара мы будемъ считать равнымъ единицѣ. Окружность большого круга мы будемъ называть „сферической прямой“, такъ какъ она является сферическимъ аналогомъ прямой.

Объ углѣ между сферическими лучами мы будемъ говорить въ обычномъ смыслѣ этого слова, слѣдовательно, не въ согласіи съ опре-

дѣленіями § 38, 8. Поэтому нѣтъ также надобности здѣсь присваивать каждой окружности большого круга опредѣленное направленіе.

Въ качествѣ „осей координатъ“ мы выберемъ двѣ взаимно перпендикулярныя сферическія прямыя и одну изъ точекъ ихъ пересѣченія будемъ называть „начальной точкой“ O. Мы опредѣлимъ дальше положительное направленіе абсциссъ OX и положительное направленіе ординатъ OY, при чемъ точки X и Y отстоятъ отъ O на одинъ квадрантъ (фиг. 90).



Фиг. 90.

Обозначимъ черезъ P произвольную точку шара. Изъ точки P мы опустимъ сферическіе перпендикуляры $PQ = \eta'$ и $PR = \xi'$ на „оси координатъ“ и положимъ, принимая во вниманіе знаки дугъ:

$$OQ = \xi, \quad OR = \eta.$$

Подъ „сферическими координатами“ x, y точки P мы разумѣемъ тригонометрическіе тангенсы дугъ ξ и η, такъ что

$$x = \operatorname{tg}\xi, \quad y = \operatorname{tg}\eta.$$

При этомъ, согласно чертежу,

$$\xi = \angle OYQ, \quad \eta = \angle OXR,$$

Для того, чтобы соотвѣтствіе между координатами и точками было однозначнымъ, мы, принимая во вниманія, что $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi + \varphi)$, должны ограничиться интерваломъ $-\pi/2 \leqq \xi, \eta \leqq +\pi/2$; выражаясь геометрически, мы занимаемся геометріей полушарія. На нашемъ чертежѣ мы разсматриваемъ лишь переднее полушаріе.

Тогда каждой парѣ значеній x, y между $-\infty$ и $+\infty$ отвѣчаетъ одна и только одна точка полушарія, и наоборотъ.

Окружность большого круга X, Y, $-X$, $-Y$ образуетъ границу разсматриваемой области и поэтому играетъ роль безконечно удаленной прямой. Связь между величинами ξ и ξ', съ одной стороны, η и η', съ другой, устанавливается формулами (§ 52, (6)):

$$\operatorname{tg}\xi' = \cos\eta \operatorname{tg}\xi, \quad \operatorname{tg}\eta' = \cos\xi \operatorname{tg}\eta. \qquad (1)$$

2. Пусть нѣкоторая сферическая прямая образуетъ съ сферическою осью x-овъ уголъ φ и отсѣкаетъ на „осяхъ координатъ“

отрѣзки α и β. Если $P\{xy\}$ есть точка сферической прямой, то имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\eta'}{\sin(\alpha-\xi)} = \frac{\operatorname{tg}\eta\cos\xi}{\sin\alpha\cos\xi - \cos\alpha\sin\xi},$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\eta} - \frac{\cos\alpha\operatorname{tg}\xi}{\operatorname{tg}\eta},$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\xi}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\eta}{\operatorname{tg}\beta} = 1.$$

Если положить:

$$\operatorname{tg}\alpha = a, \quad \operatorname{tg}\beta = b,$$

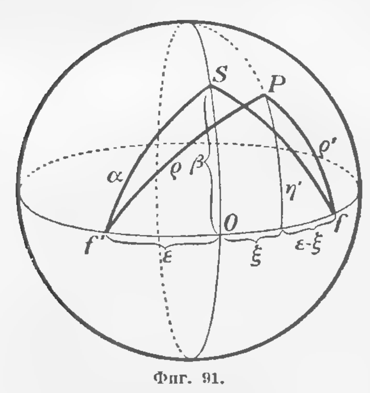
то уравненіе сферической прямой получится въ видѣ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (G)$$

Если сферическая прямая проходитъ черезъ постоянную точку $P_1\{x_1y_1\}$, то ея уравненіе имѣетъ видъ:

$$\frac{x-x_1}{a} + \frac{y-y_1}{b} = 0. \qquad (G_1)$$

Уравненіе (G) является линейнымъ относительно x и y. Наоборотъ, каждое линейное относительно x и y уравненіе представляетъ сферическую прямую. Въ самомъ дѣлѣ, общее линейное уравненіе $px + qy - r = 0$ принимаетъ видъ (G), коль скоро положить $p/r = a$, и $q/r = b$.



Фиг. 91.

Поэтому и уравненіе сферической прямой, проходящей черезъ двѣ точки P_1 и P_2, въ точности совпадаетъ съ аналогичнымъ уравненіемъ на плоскости:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1). \qquad (G_2)$$

3. Сферическимъ эллипсомъ (гиперболой) называется геометрическое мѣсто точекъ, сферическія разстоянія которыхъ ϱ, ϱ' отъ двухъ постоянныхъ точекъ f и f' („фокусовъ“) имѣютъ постоянную сумму (разность) $2a$.

Для того, чтобы получить уравненіе этихъ кривыхъ, мы возьмемъ фокусы на сферической оси x-овъ въ равномъ разстояніи отъ начала O; при этомъ положимъ

$$Of = Of' = \varepsilon.$$

Мы разсмотримъ сначала сферическій эллипсъ. Построивъ на дугѣ ff' равнобедренный сферическій треугольникъ съ ребрами $\varrho = \varrho' = \alpha$, мы получимъ точку S на этомъ эллипсѣ. Высоту SO треугольника обозначимъ черезъ β. Дугу 2α называютъ „большой осью“ сферическаго эллипса, а дугу 2β его „малой осью“.

Согласно § 52, (1):

$$\cos\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\varepsilon}; \tag{2}$$

возвышая обѣ части этого равенства въ квадратъ и выразивъ квадратъ косинуса, согласно § 26, (5), черезъ тангенсъ, получимъ:

$$\operatorname{tg}^2\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta}. \tag{3}$$

Далѣе:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varrho' &= \cos\eta' \cos(\varepsilon - \xi), \\ \cos\varrho &= \cos\eta' \cos(\varepsilon + \xi). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Пользуясь обозначеніями:

$$\varrho + \varrho' = 2\alpha, \quad \varrho - \varrho' = 2\delta,$$

изъ равенствъ (4), на основаніи § 29, (5), выведемъ соотношенія:

$$\tfrac{1}{2}(\cos\varrho + \cos\varrho') = \cos\alpha\cos\delta,$$

$$\tfrac{1}{2}(\cos\varrho + \cos\varrho') = \cos\eta'\cos\varepsilon\cos\xi = \frac{\cos\varepsilon\cos\xi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\eta'}},$$

$$\cos\alpha\cos\delta = \frac{\cos\varepsilon\cos\xi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\eta'}},$$

откуда, согласно (1) и (2):

$$\cos\beta\cos\delta = \frac{\cos\xi}{\sqrt{1 + \cos^2\xi\operatorname{tg}^2\eta}}, \quad \frac{1}{\cos^2\beta\cos^2\delta} = 1 + \operatorname{tg}^2\xi + \operatorname{tg}^2\eta,$$

$$(1 + \operatorname{tg}^2\beta)(1 + \operatorname{tg}^2\delta) = 1 + \operatorname{tg}^2\xi + \operatorname{tg}^2\eta. \tag{5}$$

Выразимъ теперь δ черезъ α и ξ. Изъ равенства (4), на основаніи § 29, (5), вытекаетъ:

$$\cos\varrho - \cos\varrho' = -2\sin\alpha\sin\delta = -2\cos\eta'\sin\varepsilon\sin\xi,$$

$$\cos\varrho + \cos\varrho' = 2\cos\alpha\cos\delta = 2\cos\eta'\cos\varepsilon\cos\xi.$$

Раздѣливъ одно равенство на другое, получимъ:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\xi}{\operatorname{tg}\alpha}, \tag{6}$$

откуда, согласно соотношенію (3):

$$\mathrm{tg}^2\delta = \frac{\mathrm{tg}^2\xi}{\mathrm{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta}.$$

Поэтому лѣвая часть равенства (5) можетъ быть преобразована такъ:

$$(1+\mathrm{tg}^2\beta)(1+\mathrm{tg}^2\delta) = 1+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\xi - \frac{\mathrm{tg}^2\beta\,\mathrm{tg}^2\xi}{\mathrm{tg}^2\alpha},$$

и изъ равенства (5) теперь слѣдуетъ:

$$\mathrm{tg}^2\eta = \mathrm{tg}^2\beta - \frac{\mathrm{tg}^2\beta\,\mathrm{tg}^2\xi}{\mathrm{tg}^2\alpha};$$

такимъ образомъ, мы приходимъ къ уравненію сферическаго эллипса

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{tg}^2\xi}{\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{\mathrm{tg}^2\eta}{\mathrm{tg}^2\beta}=1,\\ &\text{или}\\ &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

при чемъ мы полагаемъ

$$\mathrm{tg}\alpha = a,\quad \mathrm{tg}\beta = b.$$

Аналогичнымъ путемъ получается и уравненіе сферической гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (H)$$

Но въ этомъ случаѣ b (или β) не поддается геометрической интерпретаціи. Поэтому величину 2β называютъ не малою, а „мнимою осью“.

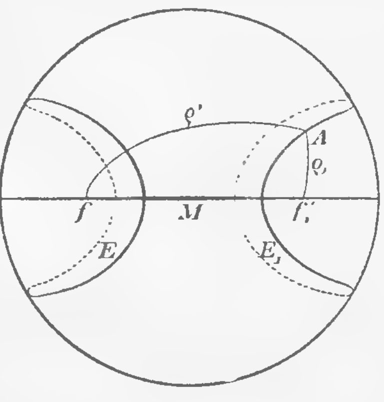
4. Мы переходимъ теперь къ изслѣдованію уравненія (E). Такъ какъ въ него величины x и y входятъ только во второй степени, то сферическій эллипсъ симметриченъ относительно осей координатъ. Съ другой стороны, такъ какъ лѣвая часть уравненія (E) является существенно положительной величиной, то сферическій эллипсъ представляется замкнутой кривой, цѣликомъ содержащейся въ сферическомъ прямоугольникѣ съ вершинами въ точкахъ (a, b), $(-a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$.

Равнымъ образомъ легко видѣть, что эллипсъ симметриченъ относительно точки O. Она называется центромъ эллипса, а концы осей — его вершинами.

Если отбросить ограниченіе, выражаемое двумя соотношеніями $-\pi/2 \leqq \xi,\ \eta \leqq +\pi/2$, то окажется, что уравненію (E) удовлетворяютъ еще точки, діаметрально противоположныя тѣмъ, которыя до сихъ поръ

разсматривались. Въ этомъ случаѣ вся кривая (E) состоитъ изъ двухъ діаметрально противоположныхъ, но замкнутыхъ и симметричныхъ относительно осей координатъ вѣтвей E и E_1.

При этомъ для вѣтви E_1 не имѣетъ мѣста равенство $\varrho + \varrho' = 2a$, но, что геометрически очевидно, $\varrho + \varrho' = 2\pi - 2a$. Это обстоятельство обуславливается тѣмъ, при составленіи уравненія мы разсматриваемъ, какъ постоянную величину, не $2a$, а $\cos 2a$. И здѣсь мы можемъ, однако, избѣжать раздѣленія на два случая, если мы самое опредѣленіе сведемъ къ тому, чтобы $\cos(\varrho + \varrho') = \text{const}$.



Фиг. 92.

5. Вѣтвь E_1 можно также разсматривать, какъ первоначальную; она имѣетъ при этомъ свои фокусы f_1 и f_1' и свой центръ O_1; за f_1 мы принимаемъ точку, діаметрально противоположную точкѣ f, а за f_1' точку, противоположную точкѣ f'.

Пусть теперь A будетъ нѣкоторая точка эллипса E_1 (фиг. 92). Проведемъ изъ фокусовъ f и f_1' черезъ точку A лучи $fA = \varrho'$ и $f_1'A = \varrho_1$. Такъ какъ точки f и f_1 діаметрально противоположны, то каждый большой кругъ, проведенный черезъ точки A и f, проходитъ также и черезъ точку f_1. Поэтому:

$$\pi - ff_1 = fA + Af_1 = \varrho' + Af_1.$$

Но $Af_1 = 2a - Af_1' = 2a - \varrho_1$; откуда

$$\varrho' - \varrho_1 = \pi - 2a = 2a = \text{const}.$$

Такимъ образомъ, если разсматриваемый шаръ (фиг. 91) повернуть такъ, чтобы точки f_1' и f оказались на переднемъ полушаріи, и снова ограничиться разсмотрѣніемъ лишь этого послѣдняго, то кривая сведется тогда къ двумъ ограниченнымъ вѣтвямъ, представляющимъ половины прежнихъ вѣтвей E и E_1; фокусами же будутъ точки f_1' и f. Полученная кривая является геометрическимъ мѣстомъ точекъ, разстоянія которыхъ отъ фокусовъ f и f_1' имѣютъ постоянную разность $2a$.

Такимъ образомъ, сферическій эллипсъ можно также разсматривать, какъ сферическую гиперболу съ фокусами въ точкахъ f и f_1'. Большія оси дополняютъ другъ друга до 2π.

Такъ какъ окружность, ограничивающая разсматриваемое полушаріе, согласно заключенію п. 1, отвѣчаетъ безконечно удаленной прямой, то сферическая гипербола аналогична плоской также и въ томъ

отношенiи, что она, такъ сказать, простирается до безконечности.

6. Касательной къ сферической кривой является сферическая прямая, имѣющая съ кривой двѣ совпадающихъ общихъ точки.

Для того, чтобы вывести уравненiе касательной къ сферическому эллипсу или гиперболѣ, мы сначала составимъ уравненiе сѣкущей, а затѣмъ допустимъ, что крайнiя ея точки совпадаютъ.

Уравненiе сферической прямой, проходящей черезъ точки x_1, y_1 и x_2, y_2, согласно п. 2, имѣетъ видъ:

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1). \qquad (G_2)$$

Такъ какъ обѣ эти точки лежатъ на кривой E, то

$$y_1{}^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_1{}^2,$$

$$y_2{}^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_2{}^2,$$

откуда помощью вычитанiя получаемъ:

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}.$$

Въ качествѣ уравненiя хорды, принимая во вниманiе (G_2), получаемъ равенство:

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}(x-x_1).$$

Для того, чтобы перейти къ касательной, положимъ $x_1=x_2$; предыдущее равенство принимаетъ видъ:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}.$$

Пользуясь уравненiемъ (F), мы приходимъ къ слѣдующему уравненiю касательной къ сферическому эллипсу:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Аналогично этому получается уравненiе касательной къ сферической гиперболѣ:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Дѣйствительно, уравненiя эти представляютъ сферическiя прямыя, имѣющiя, соотвѣтственно, съ эллипсомъ или гиперболой лишь одну об-

щую точку x_1, y_1, такъ какъ имъ удовлетворяютъ только координаты одной этой точки соотвѣтственной кривой.

7. При $\varepsilon = 0$ точки f и f' совпадаютъ съ точкой O, и изъ равенства (6) вытекаетъ, что $\varrho = \varrho'$, такъ что $\delta = 0$. Кривая (E) переходитъ въ нѣкоторую кривую (K), точки которой имѣютъ отъ точки O постоянное сферическое разстояніе. Кривая (K), такимъ образомъ, является окружностью съ сферическимъ центромъ O (§ 39, 12) и съ сферическимъ радіусомъ a. Уравненіе ея имѣетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \qquad (K)$$

Уравненіе (K), впрочемъ, легко можетъ быть выведено также непосредственно изъ опредѣленія окружности, какъ кривой, точки которой отъ центра O имѣютъ постоянное сферическое разстояніе. Мы немедленно получаемъ:

$$\cos^2 a = \cos^2 \eta' \cos^2 \xi,$$

откуда, принимая во вниманіе соотношенія (1), выводимъ уравненіе (K).

8. Сопоставляя уравненія (E) и (K):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (E)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad (K)$$

мы усматриваемъ, что ордината y точки окружности относится къ ординатѣ точки эллипса, лежащей на одномъ съ нею перпендикулярѣ къ оси абсциссъ, какъ a къ b.

Каждой точкѣ окружности отвѣчаетъ точка эллипса съ такою же абсциссой и съ ординатой, которая получается, если укоротить ординату точки окружности въ отношеніи $b : a$.

9. Представимъ себѣ теперь поверхность шара двойной и обозначимъ поверхности, въ которыхъ лежатъ эллипсъ и окружность, соотвѣтственно, черезъ σ и $\bar{\sigma}$. Тогда, обобщая сказанное выше, мы можемъ каждой точкѣ $\bar{A}$ поверхности $\bar{\sigma}$ отнести нѣкоторую точку A поверхности σ, укорачивая ординату точки $\bar{A}$ указаннымъ образомъ.

Что при этомъ „преобразованіи“ отвѣчаетъ на поверхности σ нѣкоторой сферической прямой $\bar{l}$ поверхности $\bar{\sigma}$?

Пусть равенство

$$\frac{\bar{x}}{m} + \frac{\bar{y}}{m} = 1$$

будетъ уравненіемъ прямой $\bar{l}$.

Если мы для того, чтобы получить соотвѣтствующее изображеніе на поверхности σ, положимъ:

$$x = x, \quad y = \frac{b}{a} y,$$

то придемъ къ уравненію

$$\frac{x}{m} + \frac{by}{an} = 1,$$

которое также представляетъ сферическую прямую.

Такимъ образомъ, сферическая прямая при указанномъ преобразованіи снова переходитъ въ сферическую прямую. Поэтому, въ соотвѣтствіи съ планиметріей, мы назовемъ это преобразованіе коллинеаціей.

Каждая точка „оси x-овъ“ отвѣчаетъ самой себѣ. Отсюда вытекаетъ теорема:

Каждая сферическая прямая поверхности σ пересѣкаетъ соотвѣтствующую ей прямую поверхности σ на оси x-овъ.

10. Легко видѣть, что „безконечно удаленныя образы“ — именно, окружности, ограничивающія полушарія σ и σ, отвѣчаютъ другъ другу въ поверхностяхъ σ и σ. Въ соотвѣтствіи съ планиметріей, мы можемъ поэтому сказать:

Разсматриваемая нами коллинеація характеризуется ближе, какъ „аффинное“ преобразованіе *).

11. Для очень малыхъ значеній ξ и η можно положить $\operatorname{tg} \xi = \xi$ и $\operatorname{tg} \eta = \eta$ и одновременно съ этимъ разсматривать дуги ξ, η, какъ прямолинейные отрѣзки, исходящіе изъ точки O и лежащіе въ касательной плоскости. Если примѣнить сказанное къ уравненіямъ (E) и (H), то придемъ къ теоремѣ, что сферическія коническія сѣченія, которыя очень малы по сравненію съ поверхностью шара, могутъ быть разсматриваемы, какъ плоскія коническія сѣченія. Въ частности, этотъ случай осуществляется, если шаровая поверхность имѣетъ безконечно-большой радіусъ, т. е. становится плоскостью. Итакъ, имѣетъ мѣсто теорема:

Плоскія коническія сѣченія представляютъ собой предѣльный случай сферическихъ коническихъ сѣченій для шара безконечно-большого радіуса.

*) Болѣе обстоятельное изложеніе аналитической сферики можно найти у Гюбнера (Hübner), „Ebene und räumliche Geometrie des Masses u. s. w.“, Teubner, 1895.

ГЛАВА VIII.

Точки, плоскости и прямыя въ пространствѣ.

§ 84. Основные образы геометріи пространства.

Въ геометріи пространства мы принимаемъ всѣ аксіомы планиметріи, включая и аксіому о параллельныхъ линіяхъ; мы хотимъ показать, что можно установить понятіе объ измѣреніи и теоремы о конгруэнтности въ пространствѣ безъ введенія новыхъ аксіомъ. Это было указано еще Гильбертомъ въ его „Основаніяхъ геометріи" (2-ое изд., стр. 15). Въ новыхъ учебникахъ (въ томъ числѣ и у Бальцера) это не достаточно строго проведено, и заключенія становятся понятными лишь при введеніи еще одной аксіомы, относящейся къ пространству.

Различіе между правымъ и лѣвымъ, которое въ случаѣ прямой или плоскости можетъ быть уничтожено перемѣщеніемъ наблюдателя, въ пространствѣ уже не можетъ быть сглажено и потому играетъ въ пространствѣ значительно болѣе важную роль.

1. Основными образами геометріи пространства являются точка, прямая и плоскость.

a) Каждыя двѣ точки опредѣляютъ соединяющую ихъ прямую.

b) Прямая и точка, не лежащая на этой прямой, опредѣляютъ плоскость.

c) Три точки, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ плоскость.

d) Двѣ прямыя, имѣющія одну общую точку, опредѣляютъ плоскость, въ которой содержатся обѣ прямыя.

e) Двѣ прямыя, лежащія въ одной плоскости, либо имѣютъ одну общую точку, либо же взаимно параллельны.

Двѣ прямыя, которыя не имѣютъ общей точки и не параллельны, т. е. не лежатъ въ одной плоскости, называются „скрещивающимися".

f) Двѣ плоскости, имѣющія общую точку, опредѣляютъ прямую -линію ихъ пересѣченія.

g) Двѣ плоскости, не имѣющія ни одной общей точки, называются параллельными.

h) Плоскость и прямая, не лежащая въ этой плоскости, имѣютъ не болѣе одной общей точки. Если плоскость и прямая не имѣютъ общихъ точекъ, то онѣ называются параллельными.

2. Теоремы:

a) Двѣ параллельныя плоскости α, β пересѣкаются третьей плоскостью γ, проходящей черезъ нѣкоторую точку плоскости α и нѣкоторую точку плоскости β, по двумъ параллельнымъ прямымъ a, b.

Дѣйствительно, если бы прямыя a, b, лежащія въ плоскости γ, не были параллельными, то онѣ должны были бы имѣть точку пересѣченія, которая лежала бы одновременно и въ плоскоски α и въ плоскости β.

b) Черезъ точку A, не лежащую въ данной плоскости α, можно провести не болѣе одной плоскости, параллельной плоскости α.

Если бы существовали двѣ такія плоскости β, γ, то можно было бы провести черезъ точку A и произвольную точку B плоскости α нѣкоторую плоскость ε. Если обозначить черезъ a, b, c прямыя пересѣченія плоскости ε съ плоскостями α, β ,γ, то прямыя a, b были бы параллельны прямой c. Такимъ образомъ, въ плоскости ε были бы проведены черезъ точку A двѣ прямыя, параллельныя прямой c, что противорѣчитъ извѣстной аксіомѣ плоской геометріи.

Черезъ точку A, не лежащую въ плоскости α, можно провести сколько угодно прямыхъ, параллельныхъ этой плоскости. Дѣйствительно, если черезъ точку A и произвольную точку B плоскости α проведемъ плоскость ε, то она пересѣчетъ плоскость α по нѣкоторой прямой a; вмѣстѣ съ тѣмъ прямая, проведенная въ плоскости ε черезъ точку A параллельно линіи a, будетъ параллельна и плоскости α.

c) Двѣ прямыя a, b, проведенныя черезъ точку A параллельно плоскости α, опредѣляютъ плоскость, паралельную плоскости α.

Если бы мы допустили, что плоскость (a, b) не паралелльна плоскости α, то эти плоскости пересѣкались бы по нѣкоторой прямой c. Послѣдняя должна была бы пересѣчься, по крайней мѣрѣ съ одной изъ прямыхъ a, b, и та изъ этихъ прямыхъ, съ которой пересѣкалась бы прямая c, не была бы параллельна плоскости α.

Замѣтимъ, что всякая другая проходящая черезъ точку A прямая c, паралелльная плоскости α, должна лежать въ плоскости (a, b), ибо въ противномъ случаѣ существовало бы болѣе одной плоскости, проходящей черезъ точку A и параллельной плоскости α.

Такимъ образомъ, теорема b) можетъ быть пополнена:

d) Черезъ точку A всегда можетъ быть проведена одна и только одна плоскость β, параллельная данной плоскости α, не содержащей точки A. Каждая прямая, проведенная въ плоскости β, параллельна плоскости α, и каждая прямая, проведенная черезъ какую-либо точку плоскости β параллельно плоскости α, лежитъ вся въ плоскости β.

e) Если a и b суть двѣ параллельныя прямыя въ плоскости α, A есть точка, не лежащая въ плоскости α, то двѣ плоскости $\overline{Aa}$, $\overline{Ab}$ пересѣкаются по прямой c, которая параллельна какъ прямой a, такъ и прямой b.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы прямая c пересѣченія плоскостей $\overline{Aa}$ и $\overline{Ab}$ пересѣкла бы плоскость α въ нѣкоторой точкѣ, то эта точка должна была бы лежать какъ на прямой a, такъ и на прямой b, между тѣмъ какъ эти двѣ прямыя вовсе не имѣютъ общей точки.

Въ иныхъ выраженіяхъ эта теорема можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ:

f) Если двѣ прямыя параллельны третьей, то онѣ параллельны также и между собою.

Дѣйствительно, согласно аксіомѣ планиметріи, черезъ точку A можно провести одну и только одну прямую, параллельную прямой a. Тогда $a \parallel b$ и $a \parallel c$ и, согласно e), $b \parallel c$.

g) Двѣ плоскости α и β, параллельныя третьей плоскости γ, параллельны между собою.

Если бы плоскости α, β пересѣклись по нѣкоторой прямой e, то черезъ какую-нибудь точку этой прямой мы провели бы плоскость ε, пересѣкающую плоскость γ. Плоскости α, β, γ были бы пересѣчены по прямымъ a, b, c, которыя, согласно a), должны были бы быть взаимно параллельными, между тѣмъ какъ прямыя a, b пересѣкались бы на прямой e.

Относительно пересѣченія трехъ плоскостей мы можемъ, далѣе, различать слѣдующіе случаи:

α) Три плоскости проходятъ черезъ одну прямую; онѣ имѣютъ безконечное множество точекъ пересѣченія.

β) Три плоскости параллельны; онѣ вовсе не имѣють точекъ пересѣченія.

γ) Двѣ изъ нихъ параллельны; онѣ пересѣкаются третьей плоскостью по параллельнымъ прямымъ, три плоскости не имѣютъ точекъ пересѣченія.

δ) Третья плоскость параллельна линіи пересѣченія первыхъ двухъ. Въ этомъ случаѣ всѣ три линіи пересѣченія трехъ плоскостей, попарно взятыхъ, взаимно параллельны. Три плоскости вовсе не имѣютъ точекъ пересѣченія.

ε) Третья плоскость пересѣкаетъ прямую пересѣченія первыхъ двухъ плоскостей въ нѣкоторой точкѣ. Эта точка принадлежитъ всѣмъ тремъ плоскостямъ и является точкой ихъ пересѣченія. Три прямыя, по которымъ эти плоскости, попарно пересѣкаются, проходятъ черезъ эту точку и не лежатъ въ одной плоскости. Три плоскости образуютъ трехгранный уголъ.

3. Если мы разсмотримъ три прямолинейныхъ отрѣзка, исходящихъ изъ одной точки, обозначимъ ихъ въ опредѣленномъ порядкѣ цифрами 1, 2, 3 и представимъ себѣ этотъ „треножникъ“ движущимся, – однако, съ тѣмъ ограниченіемъ, что при непрерывномъ перемѣщеніи ни одинъ изъ отрѣзковъ не долженъ переходить съ одной стороны плоскости двухъ другихъ на другую, то мы должны будемъ различать два рода этихъ треножниковъ (или нумерацій), такъ что каждая изъ этихъ системъ можетъ быть приведена въ совпаденіе съ системой того же рода, но не можетъ совпасть съ системой другого рода. На этомъ основаніи различаютъ правостороннія и лѣвостороннія системы, примѣрами которыхъ (наилучше выясняющими дѣло) могутъ служить три свободно выпрямленныхъ пальца — большой (1), указательный (2), средній (3) — правой и лѣвой рукъ.

Четыре грани или четыре вершины правильнаго тетраэдра могутъ быть обозначены цифрами 1, 2, 3, 4 различными способами, распадающимися на два типа, при чемъ два обозначенія одного и того же типа могутъ быть приведены въ совпаденіе съ помощью вращенія и перенесенія тетраэдра, два обозначенія различныхъ родовъ не могутъ быть приведены въ совпаденіе.

Можно вершины 1, 2, 3 тетраэдра заставить совпасть съ вершинами 1′, 2′, 3′ конгруэнтнаго съ нимъ тетраэдра, и тогда вершина 4′ либо совпадетъ съ вершиной 4, либо будетъ служить ея отраженіемъ.

Химія пользуется этими идеями (въ стереохиміи) для объясненія нѣкоторыхъ явленій, въ которыхъ проявляется противоположность между правымъ и лѣвымъ направленіями, какъ, напримѣръ, вращенія плоскости поляризаціи свѣта въ томъ или въ другомъ направленіи.

Движеніе тѣла, слагающееся изъ поступательнаго движенія въ опредѣленномъ направленіи и вращенія вокругъ оси, параллельной этому направленію, называется винтовымъ движеніемъ.

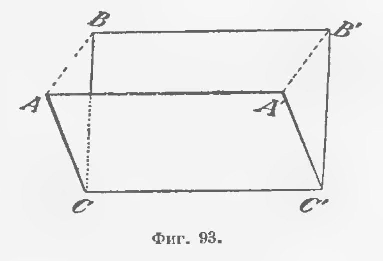
Путь пройденной какой-нибудь частью движущагося тѣла (напримѣръ, точкой, не лежащей на оси), называется винтомъ (въ геометрическомъ смыслѣ снова). Различаютъ правостороннія и лѣвостороннія винтовыя движенія. Правостороннимъ винтовымъ движеніемъ называется такое, при которомъ вращеніе для наблюдателя, расположеннаго вдоль по оси, происходитъ передъ его глазами справа налѣво.

Правостороннимъ винтовымъ движеніемъ является каждое непринужденное движеніе правой руки, напримѣръ, если я протягиваю пріятелю руку; соотвѣтствующее движеніе лѣвой руки явится лѣвостороннимъ винтовымъ движеніемъ. Въ правую сторону закручивается большинство винтовъ, встрѣчающихся въ повседневной жизни, пробочники, большинство раковинъ улитокъ (существуютъ, однако, породы, завивающіяся въ лѣвую сторону), большинство вьющихся растеній.

Линейный электрическій токъ въ окрестности своего пути образуетъ магнитное поле, вращеніе котораго вмѣстѣ съ движеніемъ тока составляетъ правостороннее винтовое движеніе (Амперово правило пловца) (т. III, § 40).

§ 85. Углы.

1. Для того, чтобы дать опредѣленіе угла между двумя скрещивающимися прямыми a, b, проведемъ черезъ какую-нибудь точку C двѣ прямыя CA, CB, соотвѣтственно параллельныя a, b. Уголъ (въ плоскости) $\sphericalangle ACB$ называютъ угломъ между прямыми a, b. Слѣдующее простое разсужденіе обнаруживаетъ, что это опредѣленіе не зависитъ отъ выбора точки C (фиг. 93):



Фиг. 93.

Возьмемъ вторую точку C' и соединимъ ее прямой съ C. Затѣмъ сдѣлаемъ

отрѣзокъ $C'A'$ равнымъ и параллельнымъ отрѣзку CA,
" $C'B'$ " " " CB

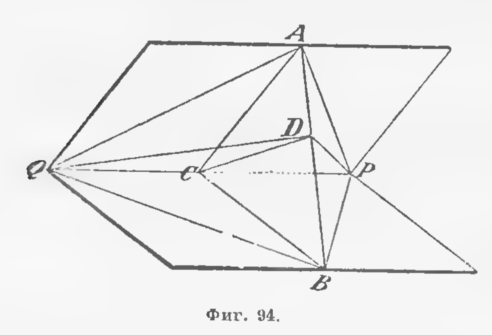
и проведемъ прямыя AA', BB'. Эти прямыя параллельны CC' и, слѣдовательно, (согласно § 84, 2 f) параллельны также одна другой. Такъ какъ, сверхъ того, оба эти отрѣзка равны отрѣзку CC', то они равны между собой и фигура $AA'B'B$ является парраллелограммомъ. Слѣдовательно, $\overline{AB} \simeq A'B'$ и $\triangle ABC$ конгруэнтенъ $\triangle A'B'C'$, такъ что и

$$\sphericalangle ACB \cong A'C'B'.$$

2. Двѣ плоскости α, β, пересѣкающіяся по нѣкоторой прямой c, дѣлятъ пространство на 4 части, называемыя **двугранными углами**.

Чтобы получить мѣру двуграннаго угла возставляютъ въ произвольной точкѣ C прямой c пересѣченія плоскостей α и β въ этихъ плоскостяхъ перпендикуляры къ прямой c (CA и CB на фиг. 94) и принимаютъ за мѣру двухграннаго угла плоскій уголъ ACB.

Подобно тому, какъ это было сдѣлано въ пунктѣ 2, можно убѣдиться въ томъ, что эта мѣра не зависитъ отъ выбора точки C. Если уголъ ACB прямой, то говорятъ что плоскости α, β взаимно перпендикулярны.



Фиг. 94.

3. Нормали и нормальныя плоскости. Проведемъ въ плоскости ABC (фиг. 94), которую мы будемъ обозначать буквой ε, произвольную прямую CD; она также будетъ перпендикулярна къ линіи c. Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, возьмемъ на прямой c двѣ точки P и Q на равныхъ разстояніяхъ отъ точки C и соединимъ A съ B. Тогда

$$\triangle ACP \cong \triangle ACQ,$$
$$\triangle BCP \cong \triangle BCQ,$$

такъ какъ у этихъ треугольниковъ равны двѣ стороны и содержащіеся между ними углы — прямые углы при C (I-ая теорема о конгруэнтности треугольниковъ). Слѣдовательно, $AP = AQ$, $BP = BQ$, $\overline{AB} = AB$; вмѣстѣ съ тѣмъ

$\triangle ABP \cong \triangle ABQ$ (III-я теорема о конгруэнтности треугольниковъ).

Слѣдовательно,

$$\sphericalangle PAB \cong QAB,$$

такъ что

$$PAD \cong QAD,$$

откуда

$$PD \cong QD;$$

$PDC \cong QDC$ (III-я теорема о конгруэнтности треугольниковъ);

слѣдовательно,

$$\sphericalangle DCP \cong \sphericalangle DCQ,$$

такъ что каждый изъ этихъ угловъ оказывается **прямымъ**.

Въ виду этого свойства плоскость εноситъ названіе перпендикулярной или нормальной къ прямой c. Каждая прямая, лежащая въ этой плоскости, даже если она не проходитъ черезъ точку C, перпендикулярна къ c.

Такъ какъ въ качествѣ прямой c можетъ быть взята произвольная прямая, то изъ сказаннаго вытекаетъ теорема:

a) Черезъ каждую точку данной прямой можетъ быть проведена одна и только одна нормальная къ ней плоскость.

Прямая c называется нормалью къ плоскости ε въ точкѣ C; относительно нормали имѣетъ мѣсто теорема:

b) Въ каждой точкѣ C данной плоскости ε можетъ быть возставлена одна и только одна нормаль къ плоскости.

Что изъ точки C не могутъ выходить двѣ нормали e и e', непосредственно очевидно, ибо въ противномъ случаѣ обѣ эти прямыя должны были бы быть перпендикулярны къ линіи пересѣченія ихъ плоскости съ плоскостью ε.

Такимъ образомъ, для того, чтобы получить нормаль e, достаточно провести въ плоскости ε черезъ точку C двѣ произвольныя прямыя a, b и построить (согласно a)) плоскости α, β, нормальныя къ этимъ прямымъ въ точкѣ C. Линія пересѣченія плоскостей α, β и будетъ искомой нормалью e, такъ какъ къ ней перпендикулярны двѣ прямыя a, b на плоскости e. Изъ сказаннаго вытекаетъ далѣе:

c) Двугранный уголъ, составленный двумя плоскостями, численно равенъ также одному изъ угловъ, образуемыхъ нормалями къ плоскостямъ.

d) Изъ точки P, лежащей внѣ плоскости ε, можно на нее опустить одну и только одну нормаль (перпендикуляръ); къ каждой прямой e черезъ данную точку P можно провести одну и только одну нормальную плоскость.

Достаточно лишь провести черезъ точку P прямую, параллельную произвольной нормали къ плоскости ε, или плоскость, параллельную произвольной нормальной плоскости къ прямой e.

e) Если прямая a перпендикулярна къ плоскости α, то и каждая плоскость, проходящая черезъ прямую a, также перпендикулярна плоскости α. Если же прямая a не нормальна къ плоскости α, то черезъ a можно провести одну и только одну плоскость, перпендикулярную къ α.

Для того, чтобы получить эту плоскость, опустимъ изъ произвольной точки прямой a перпендикуляръ d на плоскость α. Плоскость (a, d) и будетъ искомой нормальной плоскостью.

Это построенiе остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, если прямая a параллельна плоскости α или лежитъ въ ней.

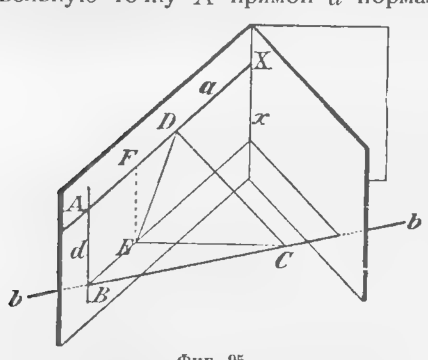
f) Для измѣренiя угла между прямой a и плоскостью α, проведемъ черезъ прямую a плоскость, перпендикулярную къ α которая пересѣчетъ плоскость α по нѣкоторой прямой c. Плоскiй уголъ между прямыми a и c и принимается за мѣру угла между прямой a и плоскостью α.

Уголъ между плоскостью и нормалью къ ней есть прямой.

§ 86. Кратчайшее разстоянiе двухъ скрещивающихся прямыхъ.

1. Если a, b суть двѣ прямыя линiи, не лежащiя въ одной плоскости, то можно найти на прямой a точку A и на прямой b точку B такого свойства, чтобы соединяющая эти точки прямая AB была перпендикулярна какъ къ прямой a, такъ и къ прямой b (фиг. 95).

Для того, чтобы построить эти точки, проведемъ черезъ произвольную точку X прямой a нормальныя плоскости къ прямымъ a и b. Эти плоскости пересѣкутся по нѣкоторой прямой x, перпендикулярной къ прямымъ a, b; прямая x встрѣчаетъ прямую a, но вообще не встрѣчаетъ прямой b.



Фиг. 95.

Плоскость ax, однако, не можетъ быть параллельна прямой b, такъ какъ въ противномъ случаѣ прямая, проведенная черезъ точку X параллельно прямой b, была бы перпендикулярна x и, слѣдовательно, должна была бы совпасть съ a; такимъ образомъ, вопреки предположенiю, прямыя a и b были бы параллельны. Итакъ, плоскость ax пересѣкаетъ прямую b въ нѣкоторой точкѣ B; если черезъ эту точку проведемъ прямую d, параллельную x, то она пересѣчетъ прямую a въ точкѣ A, при чемъ прямая d перпендикулярна одновременно какъ къ прямой a, такъ и къ прямой b.

2. Существуетъ только одна такая прямая d и разстоянiе $AB = d$ является кратчайшимъ изъ разстоянiй между произ-

вольными двумя точками прямыхъ a и b, т. е. кратчайшимъ разстоянiемъ этихъ двухъ прямыхъ.

Что не существуетъ двухъ такихъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну изъ тѣхъ же точекъ A, B, вытекаетъ непосредственно изъ того соображенiя, что въ противномъ случаѣ изъ этой точки — скажемъ, изъ B — можно было бы опустить на прямую a два перпендикуляра. Вмѣстѣ съ тѣмъ ясно, что разстоянiе точки B отъ произвольной точки прямой a, не совпадающей съ A, больше d.

Разсмотримъ теперь прямую, проходящую черезъ двѣ точки C, D, отличныя отъ A, B. Опустимъ изъ C перпендикуляръ CE на плоскость BAD. Если точка E не совпадаетъ съ B, то эта прямая перпендикулярна къ прямымъ BE и DE, и плоскость EBC нормальна къ прямой d, такъ какъ послѣдняя перпендикулярна къ двумъ прямымъ b и BE, лежащимъ въ этой плоскости. Изъ прямоугольнаго треугольника CED слѣдуетъ, что

$$CD > ED;$$

если провести черезъ E прямую EF, параллельную AB, то (такъ какъ точка F можетъ и совпасть съ D)

$$ED \geqq EF = d,$$

вмѣстѣ съ чѣмъ

$$CD > d,$$

при чемъ неравенство это имѣетъ мѣсто (какъ явствуетъ изъ чертежа) также и въ томъ случаѣ, если точки E и B совпадаютъ.

Этимъ доказана вторая часть теоремы. Но, если бы прямая CD была также перпендикулярна къ прямымъ a и b, то отсюда аналогично предыдущему вытекало бы, что $d > CD$; такимъ образомъ, и это невозможно.

§ 87. Тѣлесные углы.

1. Если три плоскости a, b, c, проходятъ черезъ одну и ту же точку P, но не имѣютъ общей прямой, то онѣ пересѣкаются попарно по тремъ прямымъ $A = (bc)$, $B = (ca)$, $C = (ab)$. Три плоскости дѣлятъ пространство на восемь частей, которыя называютъ тѣлесными или трехгранными углами. (На сферу, центръ которой совпадаетъ съ P, эти трехгранные углы проектируются въ видѣ сферическихъ треугольниковъ, какъ мы видѣли въ сферической тригонометрiи). Каждые два изъ этихъ трехгранныхъ угловъ, соприкасающiеся лишь въ точкѣ P, называются вертикальными углами.

Каждый трехгранный уголъ имѣетъ три „стороны“ или „грани“, именно, ограничивающiя его части плоскостей a, b, c, и три „ребра“, именно, части прямыхъ A, B, C, ограничивающiя эти стороны.

Тѣлесный уголь имѣетъ три двугранныхъ угла (между сторонами) и три плоскихъ угла (между ребрами); первые обозначимъ черезъ α, β, γ, а вторые — черезъ a, b, c (a, b, c являются сторонами, α, β, γ - углами соотвѣтствующаго сферическаго треугольника).

Два трехгранныхъ угла ABC и $A'B'C'$ называются конгруэнтными, если между ребрами и гранями обоихъ угловъ можно установить соотвѣтствіе такъ, чтобы соотвѣтствующіе одинъ другому двугранные и плоскіе углы были равны и чтобы при этомъ системы лучей ABC и $A'B'C'$ являются системами одного рода (либо обѣ правосторонними, либо обѣ лѣвосторонними, § 84).

Если же (при равенствѣ соотвѣтствующихъ угловъ) системы ABC и $A'B'C'$ принадлежатъ различнымъ классамъ, то углы называются отраженно-равными или симметричными.

Вертикальные трехгранные углы суть симметричные.

Если черезъ произвольную точку Q провести плоскости, параллельныя плоскостямъ a, b, c, то вокругъ точки Q получатся углы конгруэнтные, тѣмъ, которые образуютъ плоскости a, b, c.

2. Два трехгранныхъ угла конгруэнтны, если у нихъ при одинаковыхъ обозначеніяхъ совпадаютъ

I. двѣ стороны и заключенный между ними уголъ,
II. сторона и два прилежащихъ къ ней угла,
III. три стороны.

Эти три теоремы о конгруэнтности трехгранныхъ угловъ совершенно аналогичны тремъ первымъ теоремамъ о конгруэнтности плоскихъ треугольниковъ и одинаково съ ними доказываются. Къ этимъ теоремамъ должна быть присоединена еще четвертая:

IV. Два трехгранныхъ угла конгруэнтны, если у нихъ при одинаковыхъ обозначеніяхъ совпадаютъ соотвѣтствующіе двухгранные углы.

Эта теорема можетъ быть слѣдующимъ образомъ получена изъ третьей:

Если въ трехъ точкахъ A, B, C, взятыхъ на ребрахъ трехграннаго угла P, провести нормальныя къ этимъ ребрамъ плоскости, то послѣднія пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ Q, образуя снова трехгранный уголъ, который мы будемъ называть угломъ, дополнительнымъ къ P (фиг. 96).

Конгруэнтные углы имѣютъ и конгруэнтные дополнительные углы.

Каждое изъ реберъ дополнительнаго угла опирается на одну изъ сторонъ даннаго. При соотвѣтствующей нумераціи реберъ даннаго угла и дополнительнаго, они представляютъ не однородныя системы, т. е. одна изъ этихъ системъ (реберъ) является правосторонней, а другая — лѣвосторонней.

Плоскіе углы трехграннаго угла P дополняютъ соотвѣтствующіе двугранные углы Q до двухъ прямыхъ; напримѣръ:

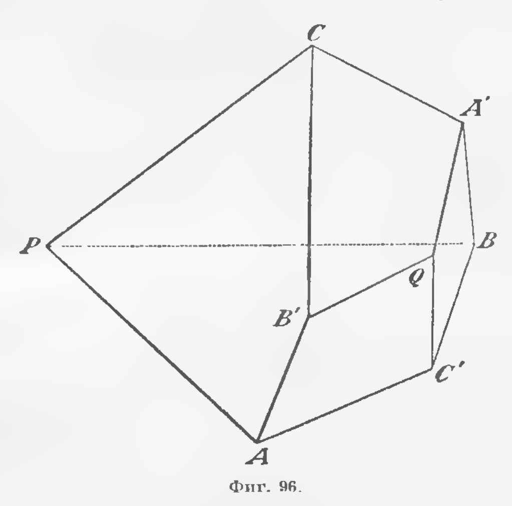
$$\sphericalangle CB'A + \sphericalangle CPA = 2d \quad \text{(фиг. 96)},$$

такъ какъ углы при A и C въ четырехугольникахъ $PAB'C$ являются прямыми; равнымъ образомъ, двугранные углы P дополняютъ плоскіе углы Q до двухъ прямыхъ; напримѣръ:

$$\sphericalangle A'CB' + A'QB' = 2d.$$

Уголъ, дополнительный къ дополнительному углу, конгруэнтенъ съ первоначальнымъ угломъ.

Такимъ образомъ, если въ разсматриваемыхъ трехгранныхъ углахъ равны всѣ двугранные углы, то въ дополнительныхъ къ нимъ углахъ равны стороны; если поэтому эти дополнительные углы однородны, то они конгруэнтны. Вслѣдствіе этого конгруэнтны и данные углы.



Фиг. 96.

Въ соотвѣтствіи съ четвертой теоремой о конгруэнтности плоскихъ треугольниковъ, возникаютъ еще два дальнѣйшихъ вопроса; именно: при какихъ условіяхъ имѣетъ мѣсто конгруэнтность, когда двѣ стороны и прилежащій уголъ одного трехграннаго угла соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ и прилежащему углу другого трехграннаго угла, или когда два угла и прилежащая сторона одного трехграннаго угла соотвѣтственно равны двумъ угламъ и прилежащей сторонѣ другого?

Въ этихъ случаяхъ не легко получить наглядный геометрическій критерій. Но формулы сферической тригонометріи даютъ еще двѣ слѣдующія теоремы:

V. Если въ двухъ однородныхъ трехгранныхъ углахъ равны части β, γ, b, то они конгруэнтны, когда

$$\beta + \gamma < \pi, \quad \beta > \gamma,$$

или когда

$$\beta + \gamma > \pi, \quad \beta < \gamma.$$

VI. Если въ двухъ трехгранныхъ углахъ равны части b, c, β, то они конгруэнтны, если

$$b + c < \pi, \quad b > c,$$

или

$$b + c > \pi, \quad b < c\ ^{*}).$$

Мы докажемъ еще слѣдующія относящіяся къ тѣлеснымъ угламъ теоремы:

3. Пусть въ треугольникѣ ASB (фиг. 97) углы при A и B будутъ острые, и пусть $\triangle AS'B$ представляетъ собою проекцію перваго треугольника на плоскость ABC (такъ что $SS' \perp ABC$). Если проведемъ плоскость, $SS'L$ перпендикулярную къ AB, то $SL > S'L$, такъ какъ треугольникъ $LS'S$ прямоуголенъ при S'. Но

$$\operatorname{tg}(LSB) = LB : LS, \quad \operatorname{tg}(LS'B) = LB : LS',$$

и, слѣдовательно,

$$LSB < LS'B;$$

равнымъ образомъ,

$$LSA < LS'A.$$

*) Если положить въ случаѣ V

$$t = \operatorname{tg}\frac{a}{2},$$

а въ случаѣ VI

$$t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

то изъ формулъ сферической тригонометріи (§ 43, (2), (2′)), выразивъ $\sin\alpha$ и $\cos a$, согласно § 29, (11), черезъ t, получимъ для t квадратныя уравненія:

$$\text{V.} \qquad t^2 \sin(\beta + \gamma) + 2t \operatorname{cotg} b \sin\beta - \sin(\beta - \gamma) = 0,$$

$$\text{VI.} \qquad t^2 \sin(b - c) + 2t \operatorname{cotg}\beta \sin b - \sin(b + c) = 0.$$

Эти уравненія имѣютъ только по одному положительному корню лишь въ томъ случаѣ, если величины

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \quad \text{или} \quad \frac{\sin(b + c)}{\sin(b - c)}$$

имѣютъ положительныя значенія. При этомъ, слѣдовательно, условіи два тѣлесныхъ угла, у которыхъ равны части β, γ, b или b, c, β, должны имѣть также равныя части a или α, а потому должны быть конгруэнтны

При помощи сложенія отсюда выводимъ:

$$ASB < AS'B. \tag{1}$$

Изъ аналогичныхъ разсужденій получается:

$$\operatorname{tg} LBS = LS : LB, \quad \operatorname{tg} LBS' = LS' : LB,$$

и, слѣдовательно,

$$LBS > LBS'. \tag{2}$$

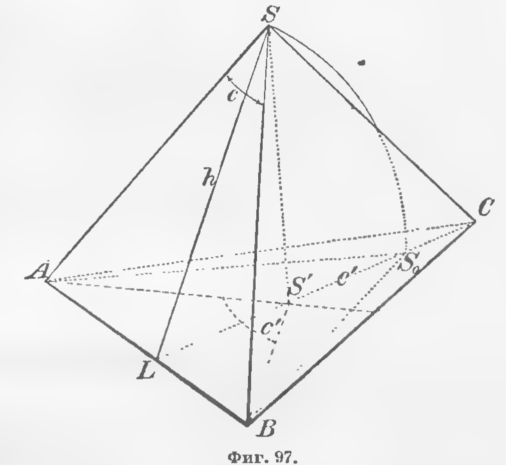
Чисто интуитивно неравенства (1), (2) можно вывести также при помощи указаннаго на чертежѣ наложенія.

4. Пусть намъ данъ тѣлесный уголъ $SABC$ съ плоскими углами a, b, c; проведемъ черезъ точку S произвольную прямую SS', встрѣчающую сферическій треугольникъ ABC; въ такомъ случаѣ, примѣняя трижды теорему п. 3-го (какъ указано на фиг. 97), получимъ:

$$0 < a + b + c < a' + b' + c' = 2\pi,$$

такъ что имѣетъ мѣсто теорема:

С у м м а п л о с к и х ъ у г л о в ъ т р е х г р а н а г о у г л а в с е г д а м е н ь ш е ч е т ы р е х ъ п р я м ы х ъ.



Фиг. 97.

5. Если α, β, γ суть двугранные углы нашего трехграннаго угла, то $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$ представятъ собою плоскіе углы дополнительнаго къ нему угла; если примѣнимъ къ этимъ плоскимъ угламъ теорему пункта 4, то получимъ

$$0 < \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma < 2\pi,$$
$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi,$$

что выражаетъ теорему:

С у м м а д в у г р а н н ы х ъ у г л о в ъ к а ж д а г о т р е х г р а н н а г о у г л а (с у м м а у г л о в ъ с ф е р и ч е с к а г о т р е у г о л ь н и к а) с о д е р ж и т с я м е ж д у д в у м я п р я м ы м и и ш е с т ь ю п р я м ы м и.

6. Если въ трехгранномъ углѣ $SABC$ черезъ ребро SC проведемъ плоскость SCC' перпендикулярно къ плоскости SAB (фиг. 98), то, согласно соотношенію (2),

$$b = CA > C'A,$$
$$a = CB > C'B.$$

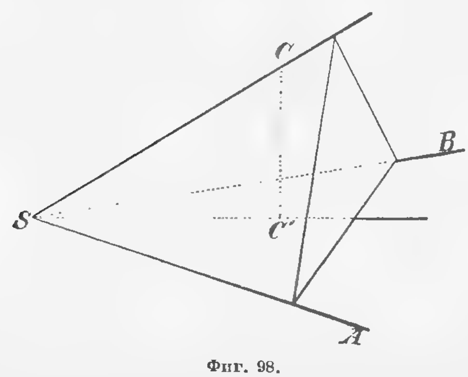
Если лучъ SC' лежитъ между лучами SA и SB, то

$$\measuredangle C'A + \measuredangle C'B = AB = c,$$

и, слѣдовательно,

$$a + b > c. \qquad (3)$$

Если же точка C' падаетъ внѣ угла ASB, то уже одинъ изъ двухъ угловъ a, b, — скажемъ, a, — больше c. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ теоремѣ:



Фиг. 98.

В ъ трехгранномъ углѣ сумма двухъ плоскихъ угловъ больше третьяго.

Переходя къ дополнительному углу, для двугранныхъ угловъ находимъ:

$$\pi + \alpha > \beta + \gamma. \qquad (4)$$

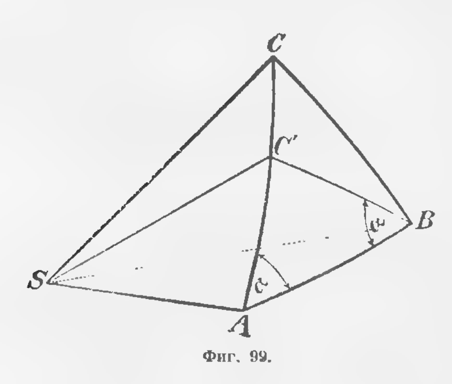
7. Если въ трехгранномъ углѣ два плоскихъ угла равны, то и противоположные имъ двугранные углы также равны, и наоборотъ.

Доказательство ведется такъ же, какъ и въ случаѣ равнобедреннаго треугольника на плоскости:

Пусть въ трехгранномъ углѣ $SABC$ (фиг. 98).

$$a = b.$$

Раздѣлимъ уголъ c пополамъ лучомъ SC' и проведемъ плоскость SCC'; мы получимъ два трехгранныхъ угла, имѣющихъ равные плоскіе углы и, въ силу третьей теоремы о конгруэнтности, симметричные. Поэтому совпадаютъ и соотвѣтствующіе двугранные углы, т. е. $\alpha = \beta$.



Фиг. 99.

Обращеніе доказанной теоремы достигается переходомъ къ дополнительному углу.

8. Въ трехгранномъ углѣ противъ большаго двуграннаго угла расположенъ большій плоскій уголъ.

Пусть (фиг. 99)

$$\beta > \alpha.$$

Проведемъ черезъ прямую SB плоскость SBC' подъ угломъ $C'BA = \alpha$. Тогда лучь C' пройдетъ между лучами A и C. Согласно п. 7, $BC' = AC'$, а согласно п. 6,

$$AC = BC' + C'C > BC;$$

такимъ образомъ:

$$b > a.$$

Соотвѣтствующая теорема для плоскаго треугольника имѣется у Евклида (книга I, 18), откуда взято и данное выше доказательство.

ГЛАВА IX.

Измѣреніе объема и поверхностей.

§ 88. Мѣра объема.

1. Относительно опредѣленія мѣры объема ограниченной части пространства, прежде всего, остаются въ силѣ тѣ же положенія, что и относительно мѣры площади плоской фигуры.

Два тѣла называются равносоставленными, если они могутъ быть разложены на соотвѣтственно конгруэнтныя части; они называются равновеликими, если путемъ присоединенія конгруэнтныхъ тѣлъ они могутъ быть преобразованы въ такія тѣла, которыя разлагаются на конгруэнтныя части.

Въ своей программной рѣчи на II Международномъ Математическомъ Конгрессѣ въ Парижѣ (Göttinger Nachrichten, 1900) Гильбертъ поставилъ вопросъ, покрывается ли это понятіе о равновеликости тѣмъ, что обычно понимали въ стереометріи подъ равновеликими многогранниками. На аналогичный вопросъ относительно плоскости, какъ мы видѣли выше, отвѣтъ получается утвердительный *).

Тѣмъ удивительнѣе было, что въ пространствѣ, какъ показалъ Денъ (Math. Ann., 55), дѣло обстоитъ совершенно иначе: равенство объемовъ многогранниковъ, вообще говоря, можетъ быть установлено лишь на основаніи равенства чиселъ, измѣряющихъ объемы (кубическое содержаніе) ряда такихъ тѣлъ, которыя получаются безконечнымъ процессомъ.

Собственно говоря, это задача интегральнаго исчисленія, общими методами котораго мы здѣсь не располагаемъ. Между тѣмъ соображенія

*) Утвердительный отвѣтъ получается также и для сферическихъ многоугольниковъ, какъ показалъ Денъ (Dehn) въ новой работѣ (Math. Ann., Bd. 60). По поводу этой главы см. также Kagan, Über die Transformation der Polyeder; Minkowsky, Volumen und Oberfläche; Schatunowsky, Über den Rauminhalt der Polyeder (всѣ статьи въ журналѣ Math. Ann., 57)

интегральнаго исчисленія были уже извѣстны въ древности (Архимедъ), хотя и подъ другимъ названіемъ; да и вообще элементарная математика обыкновенно молчаливо ими пользуется.

Здѣсь мы поставимъ себѣ задачу развить ученіе объ объемахъ сначала для многогранниковъ, а затѣмъ для тѣлъ, ограниченныхъ поверхностями простого вида, какъ, напримѣръ, для конуса, цилиндра, шара въ Евклидовой геометріи.

2. Каждому тѣлу, которое ни съ какой стороны не простирается въ безконечность и, слѣдовательно, содержится цѣликомъ, напримѣръ, внутри сферы опредѣленнаго радіуса, мы будемъ относить опредѣленное число, которое мы будемъ называть мѣрой объема, или числомъ, измѣряющимъ объемъ этого тѣла; при этомъ мы будемъ соблюдать слѣдующія условія:

1) Если тѣло B составляетъ часть тѣла A, то мѣра объема a тѣла A должна быть больше, нежели мѣра объема b тѣла B.

2) Если тѣло A разлагается на нѣсколько составляющихъ тѣлъ A_1, A_2, ..., то число, измѣряющее объемъ всего тѣла A должно быть равно суммѣ чиселъ, измѣряющихъ всѣ составляющія тѣла:

$$a = a_1 + a_2 + \cdots$$

3) Если мы отъ тѣла A отнимемъ тѣло B, то останется тѣло C, объемъ котораго

$$c = a - b.$$

4) Конгруэнтныя тѣла имѣютъ одинаковую мѣру объема, откуда слѣдуетъ, что равносоставленныя и равновеликія тѣла также имѣютъ одинаковую мѣру объема. Такимъ же образомъ и симметричныя тѣла (т. е. переходящія одно въ другое путемъ отраженія отъ плоскости) должны имѣть одну и ту же мѣру объема.

Въ какой степени мѣра объема опредѣляется этими условіями, мы увидимъ ниже. Покамѣстъ мы займемся исключительно такими тѣлами, которыя ограничены плоскостями.

Замѣтимъ, что совершенно тѣ же соображенія могутъ быть примѣнены къ опредѣленію мѣры площади плоской фигуры, но мы не будемъ на этомъ останавливаться.

3. Каждому кубу, ребро котораго равно единицѣ длины (напримѣръ, кубическому дециметру литру), мы отнесемъ число 1 въ качествѣ мѣры его объема.

Если мы раздѣлимъ ребро куба на произвольное число n равныхъ частей, то мы сможемъ тремя системами параллельныхъ плоскостей разбить первоначальный кубъ на n^3 конгруэнтныхъ кубовъ. Согласно требованію 2), объемъ каждаго изъ этихъ составляющихъ кубовъ долженъ измѣряться числомъ $1/n^3$.

Возьмемъ, далѣе, прямоугольный параллелепипедъ, ребра котораго α, β, γ соизмѣримы съ единицей длины, т. е. измѣряются раціональными числами:

$$\alpha = \frac{a}{n}, \quad \beta = \frac{b}{n}, \quad \gamma = \frac{c}{n};$$

въ такомъ случаѣ вся призма можетъ быть разрѣзана на abc конгруэнтныхъ кубовъ, у которыхъ каждое ребро равно $1/n$; слѣдовательно, объемъ этого параллелепипеда въ виду требованія 2) будетъ измѣряться произведеніемъ $\alpha\beta\gamma$.

Если теперь числа α, β, γ всѣ ирраціональны, или если нѣкоторыя изъ нихъ ирраціональны, то число, измѣряющее объемъ призмы, все-таки должно быть равно произведенію $\alpha\beta\gamma$. Дѣйствительно, допустимъ, что объемъ нашей призмы измѣряется числомъ μ, [1]) и пусть, скажемъ,

$$\alpha\beta\gamma < \mu;$$

въ такомъ случаѣ можно найти раціональныя числа (§ 22 т. I) a/n, b/n, c/n такого рода, что

$$\alpha < \frac{a}{n}, \quad \beta < \frac{b}{n}, \quad \gamma < \frac{c}{n},$$

при чемъ

$$\alpha\beta\gamma < \frac{abc}{n^3} < \mu;$$

но такой раціональный параллелепипедъ, съ одной стороны, помѣщался бы цѣликомъ внутри параллелепипеда $\alpha\beta\gamma$, а, съ другой стороны, его объемъ выражался бы бо́льшимъ числомъ. Такимъ же образомъ можно обнаружить, что и допущеніе $\mu < \alpha\beta\gamma$ приводитъ къ противорѣчію.

I. Мы, такимъ образомъ, вынуждены каждому прямоугольному параллелепипеду въ качествѣ мѣры объема отнести число, равное произведенію его реберъ.

Что опредѣленная такимъ образомъ мѣра объема дѣйствительно удовлетворяетъ требованіямъ пункта 2-го, вытекаетъ изъ правилъ дѣйствій надъ ирраціональными числами [2]).

---

[1]) Здѣсь допускается, слѣдовательно, что поставлечная задача разрѣшается, т. е. что, по крайней мѣрѣ, каждому многограннику можетъ быть отнесено число въ согласіи съ требованіями 1) — 4).

[2]) Какимъ образомъ это вытекаетъ изъ правилъ дѣйствій надъ ирраціональными числами, мы рѣшительно не понимаемъ. Напротивъ, доказать, что отнесен-

Прямую призму съ прямоугольнымъ основаніемъ можно разбить плоскостью, проходящей черезъ двѣ параллельныя діагонали ея основаній, на двѣ конгруэнтныя трехугольныя призмы. Объемъ каждой изъ этихъ составляющихъ призмъ равняется половинѣ объема всего параллелопипеда, а потому также выражается произведеніемъ основанія на высоту. Такъ какъ любой многоугольникъ можетъ быть разложенъ на прямоугольные треугольники, то предыдущее предложеніе можно обобщить.

II. Объемъ прямой призмы равняется произведенію основанія на высоту.

При требованіяхъ 1) – 4) такое опредѣленіе мѣры объема прямой призмы является необходимымъ, если только кубическая единица установлена такъ, какъ это сдѣлано выше; вмѣстѣ съ тѣмъ это опредѣленіе объема и удовлетворяетъ этимъ требованіямъ, коль скоро установлены правила дѣйствій надъ ирраціональными числами [3]).

Съ этого же мѣста находитъ себѣ примѣненіе новый принципъ, принадлежащій интегральному исчисленію.

Мы предположимъ сначала, что для разсматриваемыхъ тѣлъ существуютъ числа, измѣряющія ихъ объемы, и въ этомъ предположеніи опредѣлимъ эти числа. Къ вопросу о томъ, насколько самое это допущеніе правильно, мы еще возвратимся ниже (§ 92).

§ 89. Мѣра объема пирамиды.

1. Мы разсмотримъ пирамиду, основаніемъ которой служитъ произвольный многоугольникъ; при этомъ мы примемъ сначала, что проекція вершины (основаніе высоты) падаетъ внутрь основанія или на его периферію, а также, что основаніемъ служитъ многоугольникъ выпуклый.

Обозначимъ высоту пирамиды черезъ h и на разстояніи x отъ вершины проведемъ плоскость, параллельную основанію; эта плоскость дастъ въ сѣченіи съ пирамидой многоугольникъ, подобный основанію, при чемъ отношеніе соотвѣтствующихъ длинъ есть $x : h$. Если поэтому Δ_x и Δ суть площади этихъ двухъ многоугольниковъ, то (§ 22, предл. 13),

$$\Delta_x : \Delta = x^2 : h^2.$$

Высоту пирамиды мы раздѣлимъ на произвольное число n равныхъ частей и черезъ точки дѣленія проведемъ плоскости, параллельныя осно-

---

ныя такимъ образомъ многогранникамъ числа удовлетворяютъ поставленнымъ требованіямъ, составляетъ довольно сложную задачу. Этому и посвящена работа г. Шатуновскаго, которую авторъ цитируетъ на стр. 556. Работа эта была также помѣщена въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики“, №№ 316–319.

[3]) См. примѣчаніе 2.

ванію. Эти плоскости дадутъ въ сѣченіи съ пирамидой многоугольники, имѣющіе площади Δ_1, Δ_2, ..., $\Delta_n = \Delta$. Вмѣстѣ съ тѣмъ

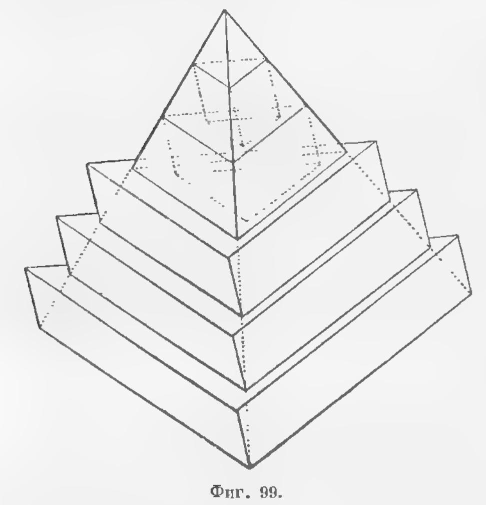
$$\Delta_1 : \Delta = \frac{h^2}{n^2} : h^2,$$

$$\Delta_2 : \Delta = \frac{4h^2}{n^2} : h^2, \ldots$$

а потому:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{n^2} 1^2, \quad \Delta_2 = \frac{\Delta}{n^2} 2^2, \ldots, \Delta_n = \frac{\Delta}{n^2} n^2.$$

На каждомъ изъ многоугольниковъ Δ_i, какъ на основаніи, мы построимъ призматическое тѣло съ высотою h/n и при томъ одно вверхъ, выходящее изъ пирамиды, другое внизъ — входящее. Мы получаемъ такимъ образомъ два ступенчатыхъ тѣла, изъ которыхъ одно содержится внутри пирамиды, а другое, напротивъ, содержитъ пирамиду въ себѣ.



Фиг. 99.

Если мы обозначимъ черезъ S_1, S_2 объемы этихъ двухъ тѣлъ, то число H, измѣряющее объемъ парамиды, если таковое существуетъ, должно удовлетворять условіямъ:

$$S_1 > H > S_2; \qquad (1)$$

согласно же § 88, 2),

$$S_1 = \frac{h\Delta}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2),$$

$$S_2 = \frac{h\Delta}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2).$$

Но въ § 57-омъ т. I-го мы получили для суммы квадратовъ n первыхъ чиселъ натуральнаго ряда формулу:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

сообразно этому,

$$S_1 = \frac{h\Delta}{6n^3} n(n+1)(2n+1) = \frac{h\Delta}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

$$S_2 = \frac{h\Delta}{6n^3} n(n-1)(2n-1) = \frac{h\Delta}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

Оба эти выраженія при достаточно большихъ n сколь угодно мало отличаются отъ $\frac{1}{3}h\Delta$; они доказываютъ, такимъ образомъ, слѣдующую теорему:

III. Объемъ пирамиды, основаніемъ которой служитъ любой многоугольникъ, равняется одной трети произведенія площади основанія на высоту.

Ограничительное условіе, которое мы сдѣлали, что основаніемъ долженъ служить выпуклый многоугольникъ, и что проекція вершины должна падать внутрь основанія, ведетъ къ тому, что каждый лучъ, выходящій изъ вершины къ любой точкѣ основанія, проектируется цѣликомъ внутрь этого многоугольника или на его периферію; этимъ обезпечивается справедливость неравенства (1). Это именно мы имѣли въ виду, вводя ограниченіе, отъ котораго теперь нетрудно освободиться. Разсмотримъ сначала треугольную пирамиду, но такую, въ которой вершина расположена надъ точкой, лежащей внѣ основанія. Тогда мы всегда имѣемъ возможность присоединеніемъ пирамидъ, удовлетворящихъ нашимъ требованіямъ, составить большую пирамиду, также удовлетворяющую этимъ требованіямъ. Теорема III будетъ тогда справедлива какъ относительно всей пирамиды, такъ и относительно прибавленныхъ пирамидъ: она справедлива поэтому и для разности, т. е. для данной пирамиды. Такъ какъ, съ другой стороны, каждый многоугольникъ можетъ быть раздѣленъ на треугольники, то теорема доказана во всемъ ея объемѣ.

2. Итакъ, объемъ пирамиды зависитъ только отъ площади основанія и отъ высоты, но не зависитъ отъ формы основанія.

Благодаря этому можно также легко опредѣлить объемъ усѣченной пирамиды. Въ самомъ дѣлѣ, если мы разсѣчемъ пирамиду плоскостью, параллельной основанію, то мы получимъ усѣченную пирамиду, основаніями которой служатъ подобные многоугольники Δ_1, Δ_2, а высота $h = h_1 - h_2$; сообразно этому $\Delta_1 : \Delta_2 = h_1^2 : h_2^2$. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ:

$$h_1 = \frac{h\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}}, \quad h_2 = \frac{h\sqrt{\Delta_2}}{\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}},$$

а для объема усѣченной пирамиды

$$S = \frac{\Delta_1 h_1 - \Delta_2 h_2}{3} = h\,\frac{\sqrt{\Delta_1}^3 - \sqrt{\Delta_2}^3}{3(\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2})} \qquad (2)$$

$$= h\,\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \sqrt{\Delta_1 \Delta_2}}{3}.$$

Такимъ образомъ, S равняется объему призмы, имѣющей высоту h и основаніе $\frac{1}{3}(\Delta_1 + \Delta_2 + \sqrt{\Delta_1 \Delta_2})$.

Если мы обозначимъ черезъ Δ_m площадь средняго сѣченія, то

$$\Delta_1 : \Delta_m : \Delta_2 = h_1^2 : \tfrac{1}{4}(h_1 + h_2)^2 : h_2^2 = \Delta_1 : \tfrac{1}{4}(\sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\Delta_2})^2 : \Delta_2,$$

а, слѣдовательно,

$$\Delta_m = \tfrac{1}{4}(\sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\Delta_2})^2 = \tfrac{1}{4}(\Delta_1 + \Delta_2 + 2\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}).$$

Если теперь изъ соотношенія (2) мы исключимъ $\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}$, то получимъ:

$$S = \frac{h}{6}\,(\Delta_1 + \Delta_2 + 4\Delta_m). \qquad (3)$$

§ 90. Принципъ Кавальери.

1. Строгое обоснованіе метода опредѣленія объема такихъ тѣлъ, которыя ограничены также кривыми поверхностями, не можетъ быть произведено элементарными средствами; даже въ интегральномъ исчисленіи это обоснованіе сопряжено съ затрудненіями, которыя коренятся въ перенесеніи числового матеріала на пространственные образы. Но, если мы ограничимся тѣмъ, что намъ даютъ наивныя пространственныя представленія, то мы будемъ имѣть богатый матеріалъ задачъ на опредѣленіе объемовъ, которыя легко поддаются разрѣшенію.

2. Подъ цилиндрической поверхностью разумѣютъ такую поверхность, которая составлена изъ совокупности всѣхъ прямыхъ, образующихъ этой поверхности, проведенныхъ изъ всѣхъ точекъ нѣкоторой плоской кривой перпендикулярно къ ея плоскости. Если эта плоская кривая представляетъ собой окружность, то мы получаемъ поверхность, которую называютъ цилиндрической поверхностью въ болѣе тѣсномъ значеніи этого слова. Если мы разсѣчемъ цилиндрическую поверхность двумя плоскостями, то мы получимъ колонну; подъ это понятіе, въ качествѣ частнаго случая, подходятъ и призматическія колонны, которыя мы разсматривали въ § 88-омъ

Если мы можемъ указать площадь основанія колонны, то относительно нея также остается справедливой теорема, что объемъ колонны

равенъ произведенію площади основанія на высоту. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ построить въ плоскости основанія два многоугольника, изъ которыхъ одинъ имѣетъ большую площадь, нежели площадь основанія колонны, а другой меньшую; мы можемъ это выполнить такъ, чтобы площади этихъ многоугольниковъ сколь угодно мало отличались одна отъ другой. Если мы теперь на этихъ многоугольникахъ, какъ на основаніяхъ, построимъ призматическія колонны, имѣющія такую же высоту, какъ и данная колонна, то объемъ послѣдней будетъ заключаться между объемами построенныхъ такимъ образомъ призмъ. Вслѣдствіе этого объемъ данной колонны не можетъ имѣть другого значенія, кромѣ произведенія основанія на высоту.

3. Мы разсмотримъ теперь тѣло K, заключенное между двумя параллельными плоскостями и заканчивающееся на этихъ поверхностяхъ двумя замкнутыми фигурами, которыя мы будемъ называть основаніями. Эти основанія могутъ иногда сводиться также къ точкамъ или линіямъ.

Сѣченіе такого тѣла плоскостью, параллельной основанію, мы будемъ называть поперечнымъ сѣченіемъ; изъ двухъ основаній мы будемъ одно называть нижнимъ, а другое верхнимъ. Перпендикулярное разстояніе между основаніями мы будемъ называть высотою тѣла и будемъ ее обозначать черезъ h.

Высоту произвольнаго поперечнаго сѣченія надъ нижнимъ основаніемъ мы будемъ обозначать черезъ x; мы примемъ, что площадь Q поперечнаго сѣченія представляетъ собой извѣстную намъ непрерывную функцію $Q(x)$ отъ x. Площади основаній суть: $Q(0)$ и $Q(h)$.

Высоту h мы раздѣлимъ на n равныхъ частей, каждая изъ которыхъ имѣетъ, такимъ образомъ, длину $\delta = h/n$; черезъ точки дѣленія мы проведемъ поперечныя сѣченія $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$; Q_0 и Q_n обозначаютъ самыя основанія.

Поперечныя сѣченія разлагаютъ тѣло A на n пластинокъ S_1, $S_2, \ldots, S_n$; вмѣстѣ съ тѣмъ число K, измѣряющее объемъ тѣла, равняется суммѣ чиселъ $S_1, S_2, \ldots, S_n$, измѣряющихъ объемы этихъ пластинокъ:

$$K = S_1 + S_2 + \ldots + S_n. \qquad (1)$$

Эти пластинки S становятся тѣмъ тоньше, тѣмъ больше число n; вмѣстѣ съ тѣмъ, чѣмъ больше становится n, тѣмъ меньше они будутъ отличаться отъ призматическихъ пластинокъ, имѣющихъ основаніями площади S_i (скажемъ, верхнее основаніе соотвѣтствующей пластинки S). Но объемъ такой призматической пластинки равенъ $Q_i\delta$, и мы, такимъ образомъ, получаемъ:

$$K = \frac{h}{n}(Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n) \qquad (2)$$

для безконечно большого n.

4. Этотъ выводъ можно было бы обосновать строже, если бы принять относительно тѣла K, что каждое выше лежащее сѣченіе, будучи спроектировано на какое-либо сѣченіе, расположенное ниже, падаетъ цѣликомъ внутрь послѣдняго или цѣликомъ охватываетъ послѣднее.

Въ такомъ случаѣ мы получили бы для K, какъ § 89-омъ для пирамиды, предѣлы

$$\frac{h}{n}(Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_{n-1}), \quad \frac{h}{n}(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n),$$

между которыми содержится его объемъ и которые можно неограниченно сблизить. Это остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, если тѣло K разбивается на конечное число частей, удовлетворяющихъ этимъ требованіямъ. Въ общемъ же случаѣ очень трудно, а, можетъ быть, и вовсе невозможно точно указать условія, при которыхъ имѣетъ мѣсто формула (2).

5. Въ формулѣ (2) заключается такъ называемый принципъ Кавальери *).

Если два тѣла, расположенныя между однѣми и тѣми же параллельными плоскостями, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что любыя два поперечныхъ сѣченія, расположенныя на одной высотѣ, имѣютъ одну и ту же площадь, то оба тѣла имѣютъ одинаковый объемъ.

6. Большое число примѣненій соотвѣтствуетъ тому случаю, когда функція $Q(x)$, выражающая объемъ поперечнаго сѣченія въ зависимости отъ высоты, есть цѣлая функція. Если это функція m-ой степени, то мы можемъ положить

$$Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m, \tag{3}$$

откуда

$$\begin{aligned}
Q_1 &= c_0 + c_1 \frac{h}{n} + c_2 \frac{h^2}{n^2} + \cdots + c_m \frac{h^m}{n^m}, \\
Q_2 &= c_0 + c_1 \frac{2h}{n} + c_2 \frac{4h^2}{n^2} + \cdots + c_m \frac{2^m h^m}{n^m}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Q_n &= c_0 + c_1 \frac{nh}{n} + c_2 \frac{n^2 h^2}{n^2} + \cdots + c_m \frac{n^m h^m}{n^m};
\end{aligned} \tag{4}$$

если мы поэтому положимъ для сокращенія

$$S_\nu(n) = 1^\nu + 2^\nu + \cdots + n^\nu,$$

*) Cavalieri, профессоръ въ Болоньѣ, 1591 (или 1598) — 1647.

т. е. обозначимъ черезъ $S_\nu(n)$ сумму ν-тыхъ степеней n первыхъ натуральныхъ чиселъ, то въ силу равенства (2) получимъ:

$$K = c_0 h + c_1 \frac{h^2}{n^2} S_1(n) + c_2 \frac{h^3}{n^3} S_2(n) + \cdots + c_m \frac{h^{m+1}}{n^{m+1}} S_m(n). \quad (5)$$

Но ν-тыя степени послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ $1, 2, 3, \ldots$ образуютъ ариѳметическій рядъ ν-таго порядка. Согласно § 57 т. I-го, мы можемъ найти ихъ сумму. Обозначая черезъ $B_\nu^{(n)}$ биноминальные коэффиціенты, мы можемъ положить

$$S_\nu(n) = a_0 + a_1 B_1^{(n)} + a_2 B_2^{(n)} + \cdots + a_{\nu+1} B_{\nu+1}^{(n)}, \quad (6)$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{\nu+1}$ можно вычислить, послѣдовательно принимая $n = 0, 1, 2, \ldots, \nu + 1$.

Значеніе коэффиціента $a_{\nu+1}$ легко опредѣлить. Въ самомъ дѣлѣ:

$$S_\nu(n) - S_\nu(n-1) = n^\nu$$
$$= a_1(B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}) + a_2(B_2^{(n)} - B_2^{(n-1)}) + \cdots + a_{\nu+1}(B_{\nu+1}^{(n)} - B_{\nu+1}^{(n-1)});$$

въ виду же соотношенія (7) § 57-го т. I-го,

$$n^\nu = a_1 B_0^{(n-1)} + a_2 B_1^{(n-1)} + \cdots + a_{\nu+1} B_\nu^{(n-1)}. \quad (7)$$

Это уравненіе должно удовлетворяться при любомъ n; такъ какъ, съ другой стороны, уравненіе ν-той степени не можетъ имѣть болѣе, нежели ν корней, то равенство (7) должно представлять собой тождество относительно n. Но биноміальные коэффиціенты $B_0^{(n-1)}$, $B_1^{(n-1)} \ldots B_{\nu-1}^{(n-1)}$ всѣ имѣютъ относительно n степень ниже ν-той, и только

$$B_\nu^{(n-1)} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-\nu)}{\nu!}$$

достигаетъ ν-ой степени, при чемъ n^ν имѣетъ коэффиціентъ $1/\nu!$ Поэтому изъ равенства (7) слѣдуетъ, что

$$a_{\nu+1} = \nu! \quad (8)$$

Согласно соотношенію (5), для опредѣленія объема K намъ нужно знать только предѣльное значеніе отношенія $S_\nu(n) : n^{\nu+1}$ при безконечно большомъ n. Но

$$\frac{B_\mu^{(n)}}{n^{\nu+1}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-\mu+1)}{n^{\nu+1}\mu!}$$
$$= \frac{1}{n^{\nu-\mu+1}\mu!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{\mu-1}{n}\right);$$

это выраженіе обращается въ 0, если $\mu < \nu + 1$, и равно $1/(\nu+1)!$ при $\mu = \nu + 1$.

Сообразно этому, въ виду соотношенiй (6) и (8),

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_\nu(n)}{n^{\nu+1}} = \frac{1}{\nu + 1}; \tag{9}$$

вмѣстѣ съ тѣмъ изъ соотношенiя (5) мы получаемъ для K:

$$K = c_0 b + \frac{c_1 b^2}{2} + \frac{c_2 b^3}{3} + \cdots + \frac{c_m b^{m+1}}{m+1}. \tag{10}$$

Если, напримѣръ, $m = 2$, такъ что

$$Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \tag{11}$$

то мы получаемъ:

$$K = c_0 b + \frac{c_1 b^2}{2} + \frac{c_2 b^3}{3}; \tag{12}$$

отсюда можно исключить коэффицiенты c_0, c_1, c_2, если намъ извѣстны три поперечныхъ сѣченiя. Если мы за таковыя примемъ основанiя и среднее сѣченiе, которыя мы въ § 89-омъ обозначили черезъ Δ_1, Δ_2, Δ_m, то

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= c_0, \\ \Delta_2 &= c_0 + c_1 b + c_2 b^2, \\ \Delta_m &= c_0 + c_1 \frac{b}{2} + c_2 \frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

Теперь мы можемъ изъ равенствъ (12) исключить c_0, $c_1 b$, $c_2 b^2$, и мы получаемъ:

$$K = \frac{b}{6} (\Delta_1 + \Delta_2 + 4\Delta_m), \tag{13}$$

какъ въ частномъ случаѣ въ равенствѣ (3) § 89-го.

Точно такъ же изъ общей формулы (10) можно исключить постоянныя $c_0, c_1, \ldots, c^m$ при помощи выраженiй, соотвѣтствующихъ $m + 1$ частнымъ, напримѣръ, равно удаленнымъ поперечнымъ сѣченiямъ *).

Формула (13) остается въ силѣ также и въ томъ случаѣ, если $Q(x)$ есть функцiя третьей степени, какъ въ этомъ легко убѣдиться изъ соотношенiй (10) и (3).

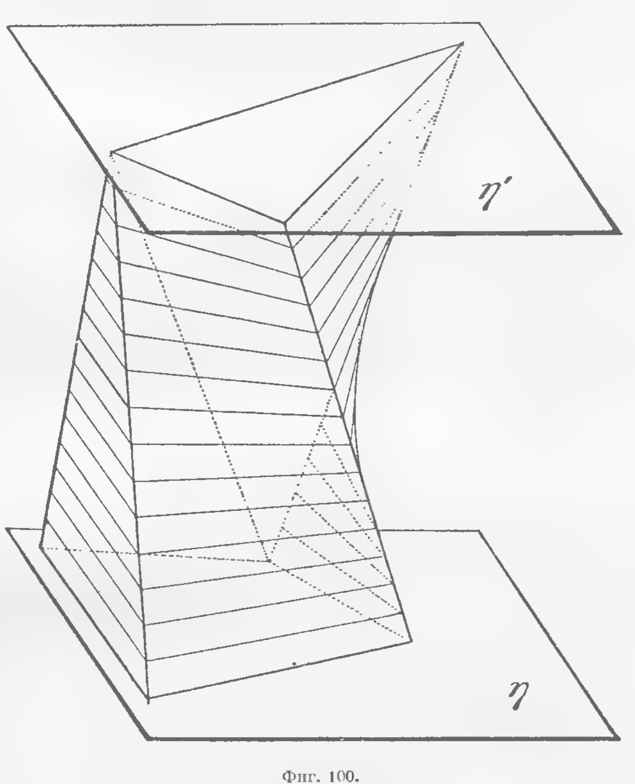
---

*) См. сообщенiе Финстербуша (Finsterbusch) въ „Трудахъ III-го Международнаго Математическаго Конгресса" (Verhandlungen des dritten internationalen Mathematikerkongresses, Leipzig, Teubner, 1905, S. 687).

§ 91. Примѣры.

1. Къ формуламъ (11), а вмѣстѣ съ тѣмъ, стало быть, къ формуламъ (12) и (13) § 90-го сводятся многіе частные случаи опредѣленія объемовъ, изъ которыхъ мы приведемъ здѣсь нѣкоторые. Прежде всего займемся призматоидомъ.

Подъ призматоидомъ мы будемъ разумѣть всякое тѣло, имѣющее только прямолинейныя ребра, концы которыхъ лежатъ на двухъ параллельныхъ плоскостяхъ η и η', и дающее въ сѣченіи съ любой плоскостью, параллельной этимъ плоскостямъ, прямолинейный многоугольникъ; задача заключается въ опредѣленіи объема тѣла, содержащагося между плоскостями η и η'. Смотря по тому, ограничивается ли призматоидъ съ боковъ только плоскостями или нѣтъ, мы будемъ называть его прямымъ или косымъ.



Фиг. 100.

Косой призматоидъ имѣетъ плоскія основанія, а сбоку ограничивается какъ плоскими, такъ и кривыми поверхностями, на которыхъ помѣщается безчисленное множество прямыхъ линій; это такъ называемыя линейчатыя (и при томъ косыя) поверхности (фиг. 100); съ такого рода поверхностями приходится имѣть дѣло при постройкахъ на верфяхъ и на крышахъ. Къ числу призматоидовъ, между прочимъ, принадлежатъ:

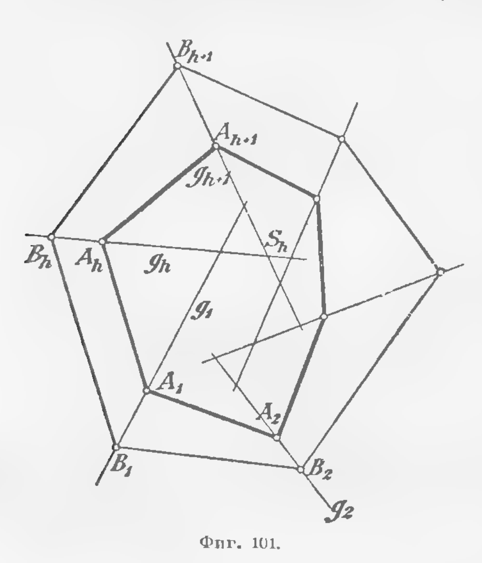
a) призма и пирамида (въ послѣднемъ случаѣ одна изъ ограничивающихъ тѣло параллельныхъ плоскостей проходитъ черезъ вершину)

b) тетраэдръ въ томъ особенномъ его положеніи, когда двѣ параллельныя плоскости проходятъ черезъ противоположныя ребра.

c) такъ называемая усѣченная пирамида, которая въ сѣченіи съ плоскостями η и η' даетъ дѣйствительные (не вырождающіеся) многоугольники.

Объемы всѣхъ призматоидовъ вычисляются по формуламъ (11), (12), (13) § 90-го.

Именно, можно показать, что поперечное сѣченіе $Q(x)$, лежащее на высотѣ x надъ основаніемъ η, представляетъ собой функцію 2-ой степени отъ x. Съ этою цѣлью спроектируемъ $Q(x)$ ортогонально на плоскость η; мы получимъ тогда многоугольникъ $B_1 B_2 \cdots B_h B_{h+1} \cdots$ (фиг. 101), который получается изъ многоугольника $Q(0)$, или $A_1 A_2 \cdots A_h A_{h+1} \cdots$, лежащаго въ самой плоскости η, путемъ присоединенія четырехугольниковъ $A_1 A_2 B_2 B_1$, $A_2 A_3 B_3 B_2$, ...



Фиг. 101.

Если мы теперь будемъ мѣнять x, то точки $B_1, B_2 \ldots$ будутъ двигаться по нѣкоторымъ прямымъ $g_1, g_2, \ldots$, которыя проходятъ черезъ вершины $A_1, A_2 \ldots$ и представляютъ собой проекціи реберъ призматоида.

Отрѣзки $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_h, B_h$ получаются въ формѣ $c_1 x$, $c_2 x, \ldots, c_h x$, гдѣ коэффиціенты c_1, c_2, c_h уже не зависятъ отъ x, а опредѣляются наклоненіемъ реберъ къ плоскости η. Если S_h есть точка пересѣченія прямыхъ g_h и g_{h+1}, то площадь

$$A_h B_h B_{h+1} A_{h+1}$$
$$- B_h S_h B_{h+1} - A_h S_h A_{h+1} = \tfrac{1}{2}(S_h A_h + x c_h)(S_h A_{h+1} + x c_{h+1}) \sin(g_h g_{h+1})$$
$$- \tfrac{1}{2} S_h A_h \cdot S_h A_{h+1} \sin(g_h g_{h+1});$$

это есть, такимъ образомъ, квадратная функція отъ x; та же функція опредѣляетъ площадь и въ томъ случаѣ, когда двѣ изъ сторонъ четырехугольника пересѣкаются. Такъ какъ далѣе

$$Q(x) = Q(0) + \sum^{h} A_h B_h B_{h+1} A_{h+1},$$

то $Q(x)$ есть функція второй степени отъ x, какъ это и требовалось доказать.

2. Объемы цилиндровъ и конусовъ можно получить, разсматривая ихъ, какъ предѣльные случаи призмъ и пирамидъ. Если r есть радіусъ основанія, а h есть высота, то:

$$\text{объемъ цилиндра} = \pi r^2 h,$$
$$\text{„ конуса} = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Эти формулы остаются въ силѣ также для наклонныхъ цилиндровъ и конусовъ.

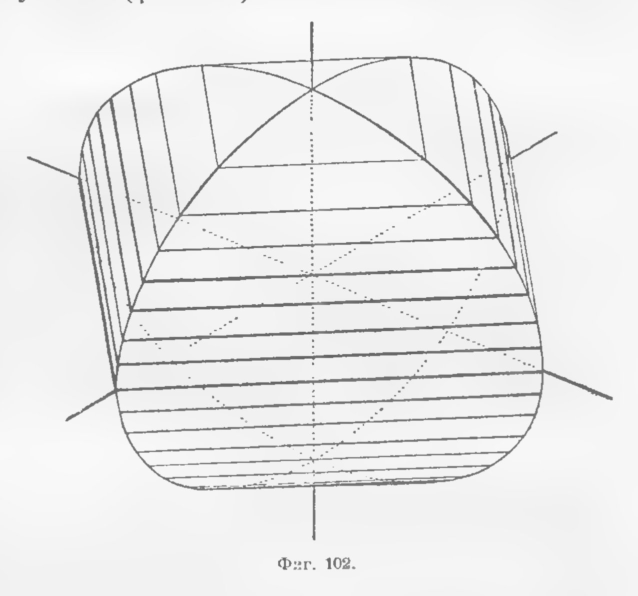
3. Шаръ радіуса r даетъ въ сѣченіи съ плоскостью, отстоящей на разстояніи x отъ его центра, кругъ радіуса $\varrho = \sqrt{r^2 - x^2}$. Площадь этого круга равняется $\pi(r^2 - x^2)$ и, слѣдовательно, также представляетъ собой функцію второй степени отъ x. Въ виду этого и здѣсь находитъ себѣ примѣненіе формула (13) § 90-го. Изъ нея мы получаемъ:

$$\text{Объемъ шара} = \frac{4\pi}{3} r^3,$$

а объемъ сферическаго сегмента съ высотою $z = r - x$:

$$\frac{\pi z^2}{3}(3r - z).$$

4. Положимъ, что два конгруэнтныхъ круглыхъ цилиндра радіуса r проникаютъ одинъ въ другой такимъ образомъ, что ихъ оси пересѣкаются подъ прямымъ угломъ (фиг. 102). Общая часть обоихъ цилиндровъ есть подушкообразное тѣло, которое ограничено четырьмя вырѣзанными съ цилиндрической поверхности двуугольниками; краями этихъ двуугольниковъ служатъ эллипсы. При пересѣченіи этого тѣла плоскостью, параллельной обѣимъ осямъ и проходящей на разстояніи x отъ послѣдней, получается въ сѣченіи квадратъ, сторона котораго равна $2\sqrt{r^2 - x^2}$; площадь этого квадрата равна $4(r^2 - x^2)$ и, слѣдовательно, выражается функціей второй степени. Мы и здѣсь можемъ, поэтому, воспользоваться формулой (13) § 90-го. Высота этого тѣла равна $2r$, а площадь средняго сѣченія $\Delta_m = 4r^2$; основаніе же здѣсь обращается въ 0.



Фиг. 102.

Сообразно этому объемъ этого тѣла равенъ $16r^3/3$, т. е. равенъ $\frac{2}{3}$ объема описаннаго куба.

Достойно вниманія, что объемъ этого тѣла, которое ограничено кривыми поверхностями, получающимися при помощи окружностей, не содержитъ числа π, а, напротивъ того, находится въ раціональномъ отношеніи къ объему куба.

§ 92. Существованіе чиселъ, выражающихъ объемъ тѣла.

Общее обоснованіе существованія чиселъ, измѣряющихъ объемъ тѣла, принадлежитъ къ числу наиболѣе трудныхъ задачъ интегральнаго исчисленія и потому падаетъ за предѣлы настоящаго сочиненія. Тѣмъ не менѣе мы должны кое-что по этому поводу сказать, чтобы освѣтить хотя бы до нѣкоторой степени простѣйшіе случаи.

Установивъ единицу длины, выберемъ произвольное цѣлое число n и представимъ себѣ кубы съ ребрами, равными $1/n$, и, слѣдовательно, каждый съ объемомъ $1/n^3$; эти кубы мы будемъ называть элементарными кубами. Каждому тѣлу, составленному изъ элементарныхъ кубовъ, соотвѣтствуетъ тогда раціональное число, измѣряющее его объемъ; оно выражается дробью, имѣющей знаменателемъ n^3, а числителемъ число кубовъ, вошедшихъ въ составъ тѣла.

Если теперь дано тѣло K, то мы можемъ изъ нашихъ элементарныхъ кубовъ составить два тѣла A_n и B , изъ которыхъ одно содержится внутри тѣла K, а другое охватываетъ тѣло K. Вмѣстѣ съ тѣмъ $A_n < B_n$.

Если, увеличивая число n, мы можемъ сдѣлать разницу между A_n и B_n произвольно малой, то числа, выражающія послѣдовательные объемы

$$A_n,\ A_{n+1},\ A_{n+2},\ \cdots;\ B_n,\ B_{n+1},\ B_{n+2},\ \cdots,$$

образуютъ Дедекиндово сѣченіе, которымъ опредѣляется нѣкоторое (раціональное или ирраціональное) число; это число и измѣряетъ объемъ тѣла K. Что устанавливаемыя такимъ образомъ числа удовлетворяютъ требованіямъ п. 2-го § 88-го, вытекаетъ изъ правилъ дѣйствій надъ ирраціональными числами (§ 24 т. I-го) [1]).

Все остальное сводится, такимъ образомъ, къ вопросу, можно ли числа A_n и B_n сдѣлать сколь угодно близкими.

Представимъ себѣ прежде всего тѣло M, составленное изъ элементарныхъ кубовъ и содержащее тѣло K цѣликомъ; это всегда возможно. Такое тѣло M будетъ всегда содержать извѣстное число элементарныхъ кубовъ, расположенныхъ цѣликомъ внутри тѣла K; совокупность послѣднихъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и число, выражающее ихъ объемъ, мы обозначимъ

[1]) См. примѣчаніе 2 на стр. 258.

черезъ A. Далѣе, будетъ нѣкоторое число кубовъ тѣла M, которые лишь частью содержатъ тѣло K; совокупность послѣднихъ, а также число, выражающее ихъ объемъ, мы обозначимъ черезъ a. Остальные кубы, содержащіеся въ тѣлѣ M, лежатъ цѣликомъ внѣ тѣла K и могутъ быть вовсе опущены. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы можемъ положить $B = A + a$; тѣло B охватываетъ тѣло K цѣликомъ.

Если существуетъ число, измѣряющее объемъ тѣла K, то оно должно содержаться между A и B; такое число необходимо будетъ существовать, если a становится безконечно малымъ, когда n неограниченно возрастаетъ.

Что это условіе всегда выполняется, если тѣло K ограничено плоскостями, легко усмотрѣть. Въ самомъ дѣлѣ, если мы представимъ себѣ, что грани тѣла K замѣнены стѣнками, толщина которыхъ равна діагонали элементарнаго куба, то всѣ кубы a умѣстятся внутри этихъ стѣнокъ; объемъ a будетъ, такимъ образомъ, меньше, нежели объемъ конечнаго числа призмъ, имѣющихъ основаніями грани этого тѣла, а высотой — діагональ куба.

Отсюда вытекаетъ далѣе, что требуемое условіе выполняется также для всѣхъ тѣхъ тѣлъ, для которыхъ могутъ быть построены входящіе и выходящіе многогранники, сколь угодно мало отличающіеся одинъ отъ другого. Это имѣетъ мѣсто для цилиндровъ, конусовъ и шаровъ.

Если мы замѣнимъ тѣла A, K, B и кубъ, принятый за единицу объема, подобными тѣлами съ линейнымъ отношеніемъ ε, то числовыя отношенія не измѣнятся. Но объемъ куба возрастетъ въ отношеніи $1 : \varepsilon^3$ (§ 88, 3). Отсюда получается теорема.

Числа, измѣряющія объемы подобныхъ тѣлъ, въ которыхъ соотвѣтствующія длины находятся въ отношеніи $1 : \varepsilon$, относятся между собой, какъ $1 : \varepsilon^3$.

§ 93. Измѣреніе кривыхъ поверхностей.

1. Измѣреніе кривыхъ поверхностей представляетъ еще гораздо большія затрудненія, чѣмъ измѣреніе объемовъ; это обусловливается тѣмъ обстоятельствомъ, что кривыя поверхности не поддаются непосредственному сравненію съ плоскостью. Здѣсь мы уже по самому существу дѣла поставлены въ необходимость прибѣгать къ предѣльному переходу. Когда въ низшей геодезіи приходится измѣрить участокъ земли и выразить его площадь, скажемъ, въ квадратныхъ метрахъ, то поступаютъ такъ, какъ будто участокъ плоскій; при незначительной кривизнѣ земной поверхности мы при этомъ не дѣлаемъ замѣтной погрѣшности. Если мы распространимъ этотъ пріемъ на большое число участковъ, покрывающихъ въ совокупности значительную часть земной поверхности, то мы получимъ

число квадратныхъ метровъ, которое можетъ быть принято за мѣру площади соотвѣтственной части земной поверхности съ тѣмъ бо́льшимь приближеніемь, чѣмъ меньше были измѣренные первоначально участки и чѣмъ больше было ихъ число. Но дѣло уже будетъ обстоять иначе, если среди измѣренныхъ участковъ имѣются такіе, которые расположены по крутымъ скатамъ, хотя бы даже высота этихъ скатовъ была ничтожно мала по сравненію со всей плоскостью; мы получимъ тогда для площади слишкомъ большое число. Изъ этого примѣра уже видно, съ какими обстоятельствами надо считаться при точномъ опредѣленіи чиселъ, измѣряющихъ площади, и какія затрудненія отсюда могутъ проистекать. Мы ограничимся въ нижеслѣдующемъ простѣйшими случаями и будемъ при этомъ пользоваться наглядными соображеніями.

2. Цилиндръ.

Выше мы разсматривали окружность, какь многоугольникъ съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ; подобно этому мы можемъ теперь смотрѣть на цилиндръ, какъ на прямую призму съ безчисленнымъ множествомъ боковыхъ граней. Мы получаемъ тогда для боковой поверхности цилиндра (т. е. для поверхности цилиндра безъ основаній) произведеніе изъ высоты на периметръ основанія; если поэтому h есть высота, а r радіусъ основанія цилиндра, то

$$\text{боковая поверхность цилиндра} = 2\pi r h.$$

3. Точно такъ же поверхность прямого конуса можетъ быть разсматриваема, какъ поверхность пирамиды съ безчисленнымъ множествомъ треугольныхъ боковыхъ граней. Длина основаній этихъ треугольниковъ въ совокупности равна въ такомъ случаѣ периметру основанія; высота боковой грани равна длинѣ s образующей; или, если h есть высота, а r - радіусъ основанія конуса, то высота боковой грани равна $\sqrt{r^2 + h^2}$.

Сообразно этому боковая поверхность конуса равна

$$\pi r s = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}.$$

4. Обратимся теперь къ усѣченному конусу; пусть r_1 и r_2 будутъ радіусы основаній, а s_1 и s_2 образующія двухъ конусовъ, разность которыхъ представляетъ собой заданный усѣченный конусъ; въ такомъ случаѣ боковая поверхность усѣченнаго конуса равна $\pi(r_1 s_1 - r_2 s_2)$. Но, съ другой стороны, $r_1 : s_1 = r_2 : s_2$; мы получаемъ поэтому для боковой поверхности выраженіе $\pi(r_1 + r_2)(s_1 - s_2)$. Если мы, наконецъ, обозначимъ черезъ r радіусъ средняго сѣченія, т. е. $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, а черезъ s образующую усѣченнаго конуса, т. е. $s_1 - s_2$, то мы получимъ окончательно:

$$\text{боковая поверхность усѣченнаго конуса} = 2\pi r s,$$

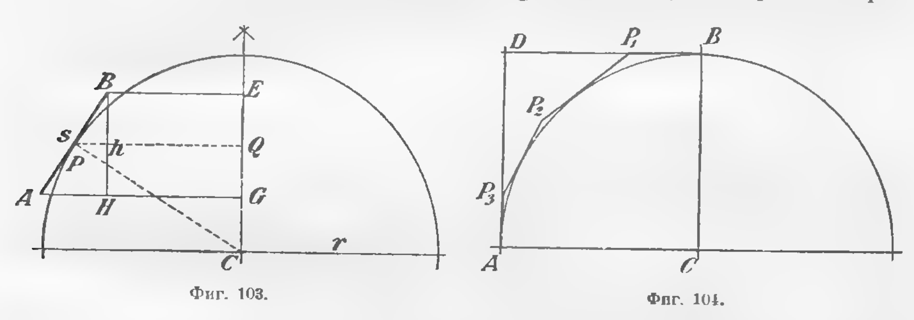
т. е. равна прямоугольнику, одной стороной котораго служитъ образующая усѣченнаго конуса, а другой периметръ средняго сѣченія $2\pi r$.

5. Эти результаты можно сдѣлать еще болѣе наглядными, если мы представимъ себѣ боковыя поверхности цилиндра, конуса и усѣченнаго конуса сдѣланными, напримѣръ, изъ бумаги и развернутыми на плоскости. Боковая поверхность цилиндра обращается тогда въ прямоугольникъ, поверхность конуса въ круговой секторъ, а поверхность усѣченнаго конуса въ кусокъ кольцеобразной площади, ограниченной двумя радіусами.

6. Эти поверхности, принадлежащія къ числу развертывающихся, именно благодаря этому развертыванію поддаются еще наглядному сравненію съ плоскими фигурами. Но иначе обстоитъ дѣло со сферою; опредѣленіе поверхности шара принадлежитъ къ числу наиболѣе блестящихъ пріобрѣтеній древности; Архимедъ съ полнымъ правомъ считалъ его вѣнцомъ своей славы и, какъ сообщаетъ Цицеронъ, завѣщалъ, чтобы фигуры шара и цилиндра были изображены на его гробницѣ.

Поверхность шара опредѣляютъ такимъ образомъ, что разсѣкаютъ ее параллельными кругами на безчисленное множество зонъ и каждую такую безконечно тонкую зону разсматриваютъ, какъ боковую поверхность усѣченнаго конуса.

7. Разсѣчемъ шаръ двумя параллельными плоскостями AG и BE (см. фиг. 103) и проведемъ плоскость PQ, проходящую на равномъ раз-



Фиг. 103. Фиг. 104.

стояніи отъ нихъ. Въ точкѣ P проведемъ касательную $AB = s$ къ меридіональной окружности въ плоскости CAB. Треугольники ABH и CPQ будутъ въ такомъ случаѣ подобны; если мы обозначимъ черезъ r радіусъ сферы, черезъ ϱ — радіусъ параллельнаго круга PQ и черезъ h высоту зоны, то $\varrho : r = h : s$, или $\varrho s = hr$. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ для боковой поверхности усѣченнаго конуса, описаннаго около шара и содержащагося между параллельными плоскостями, согласно п. 4-му, выраженіе:

$$2\pi\varrho s = 2\pi r h.$$

Но $2\pi r h$ есть боковая поверхность цилиндра, имѣющаго высотой h и основаніемъ большой кругъ шара.

8. Теперь опишемъ около квадранта CBA (фиг. 104) квадратъ $CBDA$ и многоугольникъ $BP_1P_2P_3 \cdots A$, первая сторона котораго BP_1

параллельна AC. Если мы себѣ представимъ, что эта фигура вращается вокругъ оси BC, то дуга AB опишетъ половину сферы, а отрѣзокъ AD опишетъ боковую поверхность цилиндра, описаннаго около полусферы; многоугольникъ же $P_1P_2P_3A$ опишетъ поверхность, составленную изъ боковыхъ поверхностей усѣченныхъ конусовъ, совокупность которыхъ, согласно п. 7, равна боковой поверхности цилиндра AD. Величина этой поверхности, такимъ образомъ, не зависитъ отъ числа точекъ $P_1P_2P_3$ и остается неизмѣнной, когда число этихъ точекъ неограниченно возрастаетъ. Но при такомъ неограниченномъ увеличенiи числа сторонъ эта поверхность все больше приближается къ полусферѣ. Примѣняя тѣ же самыя соображенiя ко второй половинѣ сферы, мы получаемъ слѣдующее предложенiе:

Поверхность сферы равна боковой поверхности описаннаго около нея цилиндра.

Такъ какъ высота описаннаго цилиндра равна $2r$, то поверхность сферы равна $4\pi r^2$; мы можемъ, такимъ образомъ, сказать, что поверхность сферы въ 4 раза больше площади ея большого круга.

Поверхность шарового пояса равна той части боковой поверхности описаннаго цилиндра, которая вырѣзывается его основанiями.

9. Если извѣстенъ объемъ V шара, то поверхность его S можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ: раздѣлимъ поверхность на безчисленное множество малыхъ площадокъ, напримѣръ, въ видѣ сѣтки, составленной параллелями и меридiанами. Затѣмъ всѣ точки на периферiи такого элемента поверхности соединимъ съ центромъ шара; мы получимъ тогда пирамиду, основанiемъ которой все еще, правда, служитъ кривая поверхность, но послѣднюю мы можемъ считать за плоскую съ тѣмъ бо́льшимъ правомъ, чѣмъ меньше элементы. Высота такой пирамиды равна радiусу шара r, а потому весь его объемъ равенъ всей ея поверхности, умноженной на $\frac{1}{3}r$, т. е.

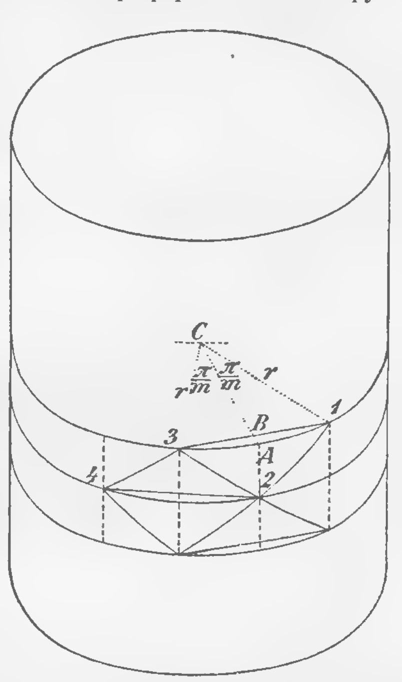
$$V = \tfrac{1}{3}rS.$$

Но, согласно § 91, 3, V равно $4\pi r^3/3$, а потому $S = 4\pi r^2$.

10. Если мы представимъ себѣ на кривой поверхности — напримѣръ, на сферѣ или на цилиндрѣ — сѣть точекъ и соединимъ каждыя три точки плоскимъ треугольникомъ, то мы получимъ многогранникъ, вписанный въ данную поверхность. Казалось бы, что поверхность этого многогранника имѣетъ предѣломъ данную кривую поверхность, если мы станемъ безпредѣльно сгущать сѣть точекъ.

Между тѣмъ Г. А. Шварцъ (H. A. Schwarz) первый замѣтилъ, что это не всегда имѣетъ мѣсто; слѣдующій примѣръ это выясняетъ.

Разсмотримъ цилиндрическую поверхность, имѣющую радіусъ r и высоту h. Мы раздѣлимъ высоту на n частей, каждая изъ которыхъ имѣетъ, такимъ образомъ, высоту h/n, а затѣмъ периферію каждой окружности, производящей дѣленіе, мы раздѣлимъ на m частей; такъ что каждой такой части соотвѣтствуетъ уголъ $2\pi/m$. Но точки дѣленія на каждой послѣдующей окружности мы сдвинемъ на π/m, какъ это показано на фиг. 105.



Фиг. 105.

Такимъ образомъ, мы получимъ треугольники (123), (234), (345) .... Разыщемъ площадь одного изъ этого ряда (конгруэнтныхъ) треугольниковъ.

Основаніе 13 такого треугольника равно $2r \cdot \sin \pi/m$, но высота треугольника равна не h/n, а гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника $2AB$, у котораго однимъ катетомъ служитъ h/n, а другимъ — „стрѣлка“ AB. Но эта стрѣлка равна

$$r - r\cos\frac{\pi}{m} = 2r\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2,$$

а потому площадь нашего треугольника равна

$$2r\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4r^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4}.$$

Но такъ какъ на цилиндрѣ расположены $2mn$ такихъ треугольника, то вся поверхность многогранника будетъ

$$2rmn\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4r^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4};$$

замѣняя здѣсь для безконечно малыхъ угловъ синусы ихъ углами (§ 118, т. I), мы получимъ:

$$2\pi r\sqrt{h^2 + \pi^4 r^2 \frac{n^2}{4m^4}}.$$

Если m и n неограниченно возрастаютъ независимо другъ отъ друга, то это выраженіе остается совершенно неопредѣленнымъ.

Правда, оно всегда имѣетъ предѣломъ $2\pi r h$, если отношеніе $n:m$ остается конечнымъ; но оно можетъ также неограниченно возрастать, если, напримѣръ, $n = m^3$. Впрочемъ, боковая поверхность цилиндра $2\pi r h$ во всякомъ случаѣ остается нижней границей всѣхъ значеній, которыя это выраженіе можетъ принимать.

ГЛАВА X.

Группы вращеній и правильныя тѣла.

§ 94. Вращенія и составленіе вращеній.

1. Разсмотримъ твердое тѣло K произвольной формы, имѣющее неподвижную точку O, вокругъ которой оно можетъ свободно вращаться. Такое тѣло можетъ принять безчисленное множество положеній и изъ любого положенія A въ любое другое возможное для него при этихъ условіяхъ положеніе B оно можетъ быть приведено безчисленнымъ множествомъ способовъ.

Изъ различныхъ возможныхъ движеній тѣла особенно замѣчательны и понятны вращенія вокругъ оси. Величина такого рода вращенія измѣряется угломъ, который произвольная плоскость, проходящая черезъ ось и неизмѣнно связанная съ твердымъ тѣломъ, образуетъ съ начальнымъ своимъ положеніемъ; по знаку этого угла отличаютъ два противоположныхъ вращенія. Въ этомъ смыслѣ уголъ поворота можетъ быть сколь угодно великъ, хотя для опредѣленія положенія тѣла можно было бы ограничиться интерваломъ въ 2π. Одно изъ двухъ направленій оси мы примемъ за положительное и будемъ самое вращеніе считать положительнымъ, если наблюдатель, стоящій по положительному направленію оси, видитъ его совершающимся по направленію, противоположному движенію часовой стрѣлки.

2. Теорема. Тѣло K всегда можетъ быть изъ любого положенія A приведено въ любое другое положеніе B посредствомъ вращенія вокругъ нѣкоторой оси a.

Доказательство легко получить, если примемъ во вниманіе, что положеніе тѣла вполнѣ опредѣляется, если дано положеніе любыхъ двухъ прямыхъ, проходящихъ въ немъ черезъ точку O. Если a_1 и a_2 суть двѣ такія прямыя въ положеніи A, а b_1 и b_2 — тѣ же прямыя въ положеніи B, то углы $(a_1 a_2)$ и $(b_1 b_2)$ равны между собою. Проведемъ теперь плоскости, перпендикулярныя къ плоскостямъ $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$ и дѣлящія попо-

ламъ углы $(a_1 b_1)$ и $(a_2 b_2)$; эти плоскости пересѣкутся по нѣкоторой прямой a, и трехгранные углы $a a_1 a_2$ и $a b_1 b_2$ будутъ конгруэнтны, ибо они имѣютъ конгруэнтные плоскіе углы. Если мы поэтому повернемъ тѣло вокругъ оси a такъ, чтобы прямая a_1 совпала съ прямой b_1, то прямая a_2 совмѣстится съ прямой b_2 а вмѣстѣ съ тѣмъ тѣло будетъ приведено изъ положенія A въ положеніе B.

3. Если мы исходимъ изъ опредѣленнаго начальнаго положенія A, то всякое другое положеніе B однозначно опредѣляется, если даны ось a и соотвѣтствующій уголъ поворота Θ. Совокупность этихъ двухъ данныхъ мы будемъ называть вращеніемъ, которое будемъ обозначать греческой буквой,—скажемъ, буквой α. Если даны положеніе A и вращеніе α, то этимъ опредѣляется положеніе B.

Если же, обратно, даны положеніе A и B, то ось соотвѣтствующаго вращенія опредѣляется этимъ однозначно, но уголъ поворота опредѣленъ лишь до числа, кратнаго 2π. Но въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать вращенія, отличающіяся на кратное 2π, какъ одно и то же вращеніе; при такомъ соглашеніи мы можемъ считать, что вращеніе вполнѣ опредѣляется двумя положеніями тѣла A и B и соотвѣтственно этому можемъ его обозначать, скажемъ, черезъ (A, B).

Если мы повернемъ тѣло вокругъ той же оси a изъ положенія B въ положеніе A, то такое вращеніе мы будемъ называть противоположнымъ вращенію α и будемъ его обозначать черезъ α^{-1} или также черезъ (B, A).

Каждому вращенію тѣла соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, противоположное вращеніе; вращеніе же, противоположное противоположному, совпадаетъ съ начальнымъ вращеніемъ.

4. Представимъ себѣ, что ось вращенія неподвижно соединена съ твердымъ тѣломъ (скажемъ, отмѣчена прутомъ, прочно вдѣланнымъ въ это тѣло). Мы можемъ тогда произвести вращеніе α при любомъ положеніи тѣла. Вращенія, какъ мы ихъ теперь понимаемъ, связаны такимъ образомъ съ тѣломъ, а не съ его положеніемъ въ пространствѣ. Если $\alpha = (A, B)$ и мы произведемъ другое вращеніе, исходя изъ положенія B, то мы можемъ послѣднее представить въ видѣ $\beta = (B, C)$, гдѣ C есть положеніе, въ которое вращеніе β приводитъ тѣло изъ положенія B. Но наше тѣло можетъ быть приведено въ положеніе C непосредственно изъ положенія A нѣкоторымъ вращеніемъ γ: относительно этого вращенія (A, C) мы будемъ говорить, что оно составлено изъ вращеній α и β. Мы будемъ это обозначать символически, какъ умноженіе; именно, мы положимъ:

$$\gamma = \alpha\beta, \quad \text{или} \quad (A, C) = (A, B)(B, C). \qquad (1)$$

При этомъ мы считаемъ нужнымъ напередъ указать, что вращеніе $\alpha\beta$, вообще говоря, отлично отъ вращенія $\beta\alpha$.

Такимъ образомъ, при этомъ умноженіи не имѣетъ мѣста законъ перемѣстительный, но зато остается въ силѣ законъ сочетательный, который находитъ себѣ выраженіе въ слѣдующей формулѣ:

$$(A, B)(B, C)(C, D) = (A, C)(C, D) = (A, B)(B, D) = (A, D).$$

5. Составленіе вращеній будетъ только тогда вполнѣ опредѣлено, если мы присоединимъ къ числу вращеній такъ называемое нулевое вращеніе a^0, т. е. неизмѣнное положеніе $(A, A) = (B, B) \cdots$. Въ самомъ дѣлѣ, только тогда получаетъ опредѣленный смыслъ составленіе двухъ взаимнообратныхъ движеній

$$aa^{-1} = a^{-1}a = a^0. \tag{2}$$

Составленіе нѣкотораго вращенія съ вращеніемъ a^0 ничего не измѣняетъ, и въ этомъ смыслѣ послѣднее въ нашемъ символическомъ умноженіи играетъ роль единицы.

6. Вращеніе $\omega = (A, A')$, которое ведетъ отъ положенія A къ положенію A', можно выполнить также, исходя отъ положенія B; положимъ, что оно приводитъ тогда къ положенію B', такъ что

$$\begin{aligned} \omega &= (A, A') = (B, B'), \\ \omega^{-1} &= (A', A) = (B', B). \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь тѣло въ положеніи B' расположено относительно того же тѣла въ положеніи B совершенно такъ же, какъ въ положеніи A' оно расположено относительно положенія A. Если поэтому мы обозначимъ черезъ $[AA']$ неизмѣняемую систему, составленную изъ тѣла въ положеніи A и того же тѣла въ положеніи A', то такая система при помощи вращенія a переходитъ изъ начальнаго положенія A въ положеніе $[BB']$ [1]).

Если a есть вращеніе (A, B), то

$$\omega^{-1}a\omega = (A', A)(A, B)(B, B') = (A', B'),$$

и

$$a' = \omega^{-1}a\omega \tag{4}$$

есть вращеніе, которое ведетъ отъ положенія A' въ положеніе B'. Вращеніе a' называется сопряженнымъ съ a (относительно ω); вмѣстѣ съ тѣмъ $a = \omega a' \omega^{-1}$, т. е. a является сопряженнымъ съ a' относительно ω^{-1}.

---

[1]) Нужно сказать, что эта теорема недостаточно ясна, но въ дальнѣйшемъ она никакого значенія не имѣетъ; существенно лишь опредѣленіе сопряженныхъ вращеній, содержащихся въ равенствахъ (4); сущность же этого опредѣленія заключается въ слѣдующемъ: вращеніе ω приводитъ тѣло изъ положенія A въ положеніе A', а изъ положенія B въ нѣкоторое положеніе B'. Если a есть вращеніе, приводящее тѣло изъ положенія A въ положеніе B, то вращеніе a', сопряженное съ a относительно ω, есть то, которое приводитъ тѣло изъ положенія A' въ положеніе B'.

7. Если β' есть вращеніе, сопряженное съ β, а γ' есть вращеніе, сопряженное съ γ, то $\beta'\gamma'$ есть вращеніе, сопряженное съ $\beta\gamma$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\beta'\gamma' = \omega^{-1}\beta\omega\omega^{-1}\gamma\omega = \omega^{-1}\beta\gamma\omega \quad \text{(согласно п. 5).} \qquad (5)$$

8. Повторное производство нѣкотораго вращенія α съ сохраненіемъ, слѣдовательно, той же оси, мы будемъ обозначать степенями α^2, α^3, $\cdots$, а повторное производство обратнаго вращенія мы будемъ обозначать черезъ α^{-1}, α^{-2}, α^{-3}, $\cdots$.

Если Θ есть уголь поворота, соотвѣтствующій вращенію α, то 2Θ, 3Θ, $\cdots$ суть углы поворота, соотвѣтствующіе вращеніямъ α^2, α^3, $\cdots$, а $-\Theta$, -2Θ, -3Θ, $\cdots$ суть углы поворота, соотвѣтствующіе вращеніямъ α^{-1}, α^{-2}, α^{-3}, $\cdots$. Составленіе этихъ степеней совершается, какъ перемноженіе обыкновенныхъ числовыхъ степеней, сложеніемъ показателей:

$$\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}. \qquad (6)$$

9. Если $\alpha' = \omega^{-1}\alpha\omega$, то, согласно п. 7,

$$\alpha'^{-1} = \omega^{-1}\alpha^{-1}\omega,$$

и для любого положительнаго или отрицательнаго показателя ν:

$$\alpha'^{\nu} = \omega^{-1}\alpha^{\nu}\omega \text{ [2]}. \qquad (7)$$

10. Если уголъ поворота Θ находится въ въ раціональномъ отношеніи къ 2π, то вращеніе называется **циклическимъ**. Въ этомъ случаѣ всегда существуютъ показатели h, для которыхъ $\alpha^h = \alpha^0$, т. е. равно нулевому вращенію. Если μ есть наименьшій положительный показатель, удовлетворяющій этому требованію [3]), то вращенія

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{\mu-1} \qquad (8)$$

всѣ различны между собой. Всякая другая степень вращенія α совпадаетъ съ однимъ изъ вращеній (8), и $\alpha^{h+\mu} = \alpha^h$. Вращеніе α^h совпадаетъ съ α^0 въ томъ и только въ томъ случаѣ, если h кратно μ. Въ самомъ

[2]) Чтобы убѣдиться, что $\omega^{-1}\alpha^{-1}\omega$ есть вращеніе α'^{-1}, т. е. обратное вращенію $\alpha' = \omega^{-1}\alpha\omega$, достаточно замѣтить, что, въ силу закона сочетательнаго (п. 4),

$$(\omega^{-1}\alpha^{-1}\omega)(\omega^{-1}\alpha\omega) = \omega^{-1}\alpha^{-1}\omega\omega^{-1}\alpha\omega = \omega^{-1}\alpha^{-1}\alpha\omega = \omega^{-1}\omega = 1.$$

Далѣе:

$$(\omega^{-1}\alpha\omega)(\omega^{-1}\alpha\omega) = \omega^{-1}\alpha\omega\omega^{-1}\alpha\omega = \omega^{-1}\alpha^2\omega.$$

Такимъ же образомъ обнаружимъ справедливость соотношенія (7) при любомъ ν.

[3]) Если $\Theta = \frac{m}{n}2\pi$, гдѣ $\frac{m}{n}$ есть несократимая дробь, то $\mu = n$.

дѣлѣ, посредствомъ дѣленія мы можемъ представить число h въ видѣ $h = q\mu + \mu'$, гдѣ $0 \leq \mu' < \mu$, и $a^h = a^{\mu'}$. Если бы было $a^h = a^0$, то μ', будучи меньше μ, необходимо должно быть равно нулю.

Показатель μ называется порядкомъ циклическаго вращенія a, а рядъ (8) — его періодомъ. Въ виду соотношенія (7) мы получаемъ теорему:

Сопряженныя вращенія имѣютъ одинъ и тотъ же порядокъ.

11. Если a не циклическое вращеніе, то въ ряду степеней

$$\cdots a^{-2},\ a^{-1},\ a^0;\ a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots$$

тотъ же элементъ не повторяется дважды.

Въ самомъ дѣлѣ, если $a^h = a^k$, то $h\Theta = k\Theta + 2\pi m$, а потому $\Theta = 2\pi m/(h - k)$.

§ 95. Конечныя группы вращеній.

1. Система, состоящая изъ конечнаго числа n вращеній

$$S = a,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots \tag{1}$$

называется группой вращеній, если каждое вращеніе, составленное изъ двухъ вращеній этой системы, также входитъ въ составъ этой системы.

Число n содержащихся въ системѣ S вращеній называется порядкомъ группы.

Мы увидимъ ниже, что существуетъ только ограниченное число видовъ такихъ группъ.

2. Согласно опредѣленію группы, вмѣстѣ съ каждымъ вращеніемъ a въ составъ ея должны входить всѣ степени a; отсюда непосредственно вытекаетъ, что a должно быть циклическимъ вращеніемъ; въ самомъ дѣлѣ, если бы a не было циклическимъ вращеніемъ, то число различныхъ вращеній, согласно § 94, п. 11, не было бы конечнымъ. Если μ есть порядокъ вращенія a, то вращенія

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots,\ a^{\mu-1} = a^{-1},\ a^\mu = a^0$$

содержатся въ группѣ S.

I. Каждая группа S содержитъ, такимъ образомъ, нулевое вращеніе, а также и вращеніе, противоположное любому изъ входящихъ въ ея составъ вращеній.

3. Мы будемъ исходить изъ нѣкотораго опредѣленнаго начальнаго положенія E и сообразно этому представимъ вращенія группы S въ формѣ

$$a = (E,\ A),\quad \beta = (E,\ B),\quad \gamma = (E,\ C),\ \cdots \tag{2}$$

Тогда A, B, C $\cdots$ суть положенія тѣла K къ числу которыхъ мы отнесемъ и положеніе E; вращеніями группы S тѣло можетъ быть пере-

ведено изъ любого изъ этихъ положенiй, — скажемъ, изъ положенiя A въ любое другое положенiе B, ибо

$$\alpha^{-1}\beta = (A,\ B).$$

4. Представимъ себѣ теперь всю эту систему положенiй E, A B, C $\cdots$ соединенными въ одно неизмѣняемое тѣло M [4]). Если тогда мы выполнимъ надъ тѣломъ M вращенiе $\vartheta = (E,\ T)$, при чемъ A, B и C будутъ слѣдовать въ этомъ вращенiи за E, то это вращенiе переводитъ положенiя A, B, C $\cdots$ въ новыя положенiя A', B', C' $\cdots$, которыя, согласно § 94, 6, опредѣляются тѣмъ, что

$$\vartheta = (E,\ T) = (A,\ A') = (B,\ B') = (C,\ C') = \cdots.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\alpha\vartheta = (E,\ A'), \quad \beta\vartheta = (E,\ B'), \quad \gamma\vartheta = (E,\ C'),\ \cdots, \tag{2'}$$

и вращенiя $\alpha\vartheta$, $\beta\vartheta$, $\gamma\vartheta$, $\cdots$ въ своей совокупности совпадаютъ съ вращенiями группы S (они могутъ оказаться только расположенными въ другомъ порядкѣ). Въ самомъ дѣлѣ, всѣ эти вращенiя содержатся въ группѣ S; всѣ они различны между собой и число ихъ равно n [5]). Отсюда слѣдуетъ, что и совокупность положенiй A', B', C' совпадаетъ съ совокупностью A, B, C, $\cdots$. Итакъ:

Тѣло M обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что каждое изъ вращенiй S совмѣщаетъ его съ самимъ собой.

5. Каждое вращенiе группы S, за исключенiемъ нулевого вращенiя, имѣетъ опредѣленную ось; но нѣкоторыя вращенiя могутъ имѣть общую ось. При каждомъ вращенiи группы S система этихъ осей переходитъ въ себя самое [6]). На разсмотрѣнiи этихъ осей основано опредѣленiе всѣхъ возможныхъ конечныхъ группъ вращенiя.

Ось a называется осью перваго рода, если въ группѣ S имѣется вращенiе ω, которое ее обращаетъ (голоэдрическiя

[4]) Т. е. тѣло K представимъ себѣ, какъ выше въ п. 6. § 94-го, одновременно во всѣхъ этихъ положенiяхъ; это даетъ рядъ тѣлъ, которая мы мысленно соединяемъ въ одну неизмѣняемую систему.

[5]) Это видно также и непосредственно изъ сопоставленiя равенствъ (2′) съ равенствами (2), ибо A', B' C', ... суть тѣ же положенiя A, B, C, .. , но только, быть можетъ, въ иномъ порядкѣ.

[6]) Пусть a будетъ ось вращенiя α, а λ — нѣкоторое вращенiе нашей группы: черезъ $a\lambda$ будемъ обозначать ту прямую b, въ которую переходитъ ось a при вращенiи λ; тогда $a\alpha = a$, $a\lambda = b$. Вмѣстѣ съ тѣмъ $b\lambda^{-1} = a$, $b\lambda^{-1}\alpha = a\alpha = a$; поэтому $b\lambda^{-1}\alpha\lambda = a\lambda = b$; т. е. вращенiе λ совмѣщаетъ ось a вращенiя α съ осью b вращенiя $\lambda^{-1}\alpha\lambda$, сопряженнаго съ α относительно вращенiя λ. Система осей вращенiй α, β, γ ... нашей группы переходитъ въ систему осей вращенiй $\lambda^{-1}\alpha\lambda$, $\lambda^{-1}\beta\lambda$, $\lambda^{-1}\gamma\lambda$, ..., а это тѣ же вращенiя, только въ другомъ порядкѣ.

оси) [7]). Она называется осью второго рода, если въ группѣ S нѣтъ вращенія, которое ее обращаетъ (геміэдрическія оси).

Каждой оси присваивается опредѣленная кратность; именно, оси a присваивается кратность ν, если въ группѣ S имѣется ν вращеній, считая въ томъ числѣ и нулевое вращеніе, которыя оставляютъ эту ось неизмѣнной. Эти вращенія

$$Q = a^0,\ a^1,\ a^2,\ \cdots,\ a^{\nu-1} \qquad (3)$$

можно представить въ видѣ степеней одного изъ нихъ, именно того, которому соотвѣтствуетъ наименьшій положительный уголъ поворота [8]).

Если a есть ось перваго рода и ω', ω суть два вращенія, которыя обращаютъ ось, то $\omega'\omega^{-1}$ и $\omega^{-1}\omega'$ суть вращенія, которыя оставляютъ ось a безъ измѣненія; поэтому $\omega'\omega^{-1} = a^{\varkappa}$, $\omega' = a^{\varkappa}\omega$; вмѣстѣ съ тѣмъ вращеніе $\omega^{-1}\omega' = \omega^{-1}a^{\varkappa}\omega$ оставляетъ ось a безъ измѣненія; отсюда слѣдуетъ:

II. Совокупность вращеній группы S, обращающихъ ось перваго рода, всегда содержится въ системѣ вида:

$$Q\omega = \omega,\ a\omega,\ a^2\omega,\ \cdots,\ a^{\nu-1}\omega; \qquad (4)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ система $\omega^{-1}Q\omega$ совпадаетъ съ системой Q.

Если два различныхъ вращенія ϑ и ϑ_1 приводятъ ось a въ одно и то же положеніе a_1, то вращеніе $\vartheta\vartheta_1^{-1}$ оставляетъ эту ось безъ измѣненія; поэтому $\vartheta\vartheta_1^{-1} = a^{\varkappa}$ и $\vartheta = a^{\varkappa}\vartheta_1$. Сообразно этому совокупность вращеній, преобразовывающихъ ось a въ a_1, можетъ быть представлена въ формѣ

$$Q\vartheta_1 = \vartheta_1,\ a\vartheta_1,\ a^2\vartheta_1,\ \cdots,\ a^{\nu-1}\vartheta_1;$$

если при этомъ a есть ось перваго рода, то вращеніе $\omega\vartheta_1$ даетъ оси a направленіе, противоположное оси a_1; послѣдняя также будетъ поэтому осью перваго рода. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ предложеніе:

III. Число вращеній группы S, преобразовывающихъ ось a въ a_1 или (если a есть ось перваго рода) въ ось, противоположную оси a_1, равно 2ν для осей перваго рода и ν для осей второго рода.

[7]) Т. е. замѣняетъ той же прямой въ противоположномъ направленіи.

[8]) Если вращеніе a оставляетъ ось a неизмѣнной, т. е. если $aa = a$, то оно имѣетъ a своею осью; иначе: a есть ось ν ой кратности, если въ группѣ есть ν различныхъ вращеній, имѣющихъ прямую a своею осью. Если Θ, уголъ поворота вращенія a есть наименьшій изъ угловъ поворота этихъ вращеній, то углы поворота остальныхъ вращеній необходимо должны быть кратны Θ: если бы, напримѣръ, вращенію β соотвѣтствовалъ уголъ поворота Θ' не кратный Θ, такъ что Θ содержится въ Θ' m разъ съ остаткомъ $\Theta'' < \Theta$, то въ группѣ было бы вращеніе βa^{-m} съ угломъ поворота Θ'', меньшимъ Θ; это противно условію. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что всѣ вращенія, имѣющія прямую a своего осью, будутъ степенями вращенія a.

Вращеніе ϑ_1^{-1} приводитъ ось a_1 въ положеніе a, $a^\varkappa$ есть вращеніе вокругъ оси a, а вращеніе ϑ_1 приводитъ ось a въ положеніе a_1; поэтому $\vartheta_1^{-1} a^\varkappa \vartheta_1$ есть вращеніе вокругъ оси a_1, и въ этой формѣ содержатся всѣ вращенія вокругъ оси a_1; въ самомъ дѣлѣ, если α_1 есть вращеніе вокругъ оси a_1, то $\vartheta_1 \alpha_1 \vartheta_1^{-1}$ есть вращеніе вокругъ оси a, а потому можетъ быть выражено черезъ $a^\varkappa$; поэтому $\alpha_1 = \vartheta_1^{-1} a^\varkappa \vartheta_1$.

IV. Въ виду этого a_1 есть ось той же кратности ν, что и a, и число содержащихся въ S вращеній вокругъ оси a_1 (не считая нулевого вращенія) есть $\nu - 1$.

Положимъ теперь, что совокупность вращеній группы S приводитъ ось a въ μ различныхъ положеній

$$a, a_1, a_2, \cdots, a_{\mu-1}. \tag{5}$$

Всѣ эти оси имѣютъ одну и ту же кратность ν и представляютъ собой либо всѣ оси перваго порядка, либо всѣ оси второго порядка.

Совокупность осей (5) мы будемъ называть **системой сопряженныхъ осей**, а число μ — **порядкомъ этой системы**.

Такъ какъ каждое вращеніе группы S преобразуетъ ось a въ одну изъ осей системы (5), а n есть число вращеній группы S, то,

$$n = 2\mu\nu, \quad \text{или} \quad n = \mu\nu,$$

смотря по тому, будетъ ли a осью перваго или второго рода; а такъ какъ ν, по меньшей мѣрѣ, равно двумъ, то:

V. Если система, содержащая μ сопряженныхъ осей ν-той кратности, есть система перваго рода, то

$$\mu\nu = \tfrac{1}{2}n, \quad \mu \leq \tfrac{1}{4}n;$$

если же это есть система второго рода, то

$$\mu\nu = n, \quad \mu \leq \tfrac{1}{2}n;$$

Такъ какъ здѣсь не приходится считать нулевого вращенія, то изъ теоремъ IV и V вытекаетъ слѣдующее.

VI. Число содержащихся въ группѣ S вращеній вокругъ одной изъ системы μ сопряженныхъ осей ν-той кратности равно $\mu(\nu - 1)$, т. е.

$\tfrac{1}{2}n - \mu$ въ системѣ перваго рода,

$n - \mu$ „ „ второго рода.

6. Съ помощью этихъ предложеній теперь не трудно установить всѣ возможныя группы вращеній. Число вращеній, содержащихся въ группѣ S, не включая нулевого вращенія, равно $n - 1$. Если, слѣдовательно, имѣется одна система сопряженныхъ осей, то, по теоремѣ VI,

$$n - 1 = \tfrac{1}{2}n - \mu \quad \text{или} \quad n - 1 = n - \mu;$$

но первое допущеніе невозможно, такъ какъ оно приводило бы къ отрицательному или нулевому значенію для μ; второе же допущеніе даетъ $\mu = 1$, а ν остается произвольнымъ. Мы получаемъ, такимъ образомъ, первый случай:

I. Пирамидальное вращеніе.

Здѣсь существуетъ только одна ось второго рода, вмѣстѣ съ тѣмъ $\nu = n$, а значеніе n ничѣмъ не ограничено.

7. Положимъ теперь, что имѣются двѣ системы сопряженныхъ осей; это приводитъ прежде всего къ тремъ возможнымъ комбинаціямъ: либо обѣ системы состоятъ изъ осей перваго рода, либо обѣ состоятъ изъ осей второго рода, либо, наконецъ, одна состоитъ изъ осей перваго рода, другая изъ осей второго рода. Если ν означаетъ кратность осей, а μ порядокъ соотвѣтственной системы, то эти три случая характеризуются слѣдующимъ образомъ:

$$1) \; n - 1 = \mu_1(\nu_1 - 1) + \mu_1'(\nu_1' - 1) = n - \mu_1 - \mu_1',$$

$$2) \; n - 1 = \mu_2(\nu_2 - 1) + \mu_2'(\nu_2' - 1) = 2n - \mu_2 - \mu_2',$$

$$3) \; n - 1 = \mu_1(\nu_1 - 1) + \mu_2(\nu_2 - 1) = \frac{3n}{2} - \mu_1 - \mu_2.$$

Однако, первый случай невозможенъ, ибо тогда было бы $\mu_1 + \mu_1' = 1$; между тѣмъ какъ каждое изъ чиселъ μ_1 и μ_1', по меньшей мѣрѣ, равно 1, во второмъ случаѣ мы получили бы

$$\mu_2 + \mu_2' = n + 1;$$

но и это невозможно, такъ какъ, согласно теоремѣ V, ни одно изъ чисел μ_2 и μ_2' не превышаетъ $n/2$. Остается только третій случай, который приводитъ къ равенству

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{n}{2} + 1;$$

въ этомъ случаѣ ν_2 не превышаетъ 3; въ самомъ дѣлѣ, если бы было $\nu_2 \geqq 4$, то, согласно теоремѣ V, было бы $\mu_2 \leqq n/4$; но тогда мы получили бы изъ соотношенія 3)

$$\mu_1 = \frac{n}{2} + 1 - \mu_2 \geqq \frac{n}{4} + 1,$$

что не можетъ имѣть мѣста въ виду теоремы V.

Если $\nu_2 = 2$, $\mu_2 = \tfrac{1}{2}n$, то должно быть $\mu_1 = 1$, $\nu_1 = \tfrac{1}{2}n$. Этотъ случай, какъ мы увидимъ, возможенъ и даетъ группу:

II. Двупирамидальное или діэдрическое вращеніе (съ нечетнымъ основаніемъ).

Но если $\nu_2 = 3$, такъ что $\mu_2 = n/3$, то мы получаемъ:

$$\mu_1 = \frac{n}{6} + 1, \quad n = 6(\mu_1 - 1), \quad \nu_1 = \frac{3(\mu_1 - 1)}{\mu_1}.$$

Такъ какъ $(\mu_1 - 1)/\mu_1$ есть правильная дробь, то ν_1 должно быть меньше 3, а потому ν_1 должно быть равно 2; слѣдовательно.

$$\mu_1 = 3, \quad \nu_1 = 2; \quad \mu_2 = 4. \quad \nu_2 = 3; \quad n = 12:$$

III. Тетраэдрическое вращеніе.

8. Если имѣются три системы сопряженныхъ осей, то всѣ онѣ должны быть перваго рода; въ самомъ дѣлѣ, если бы изъ нихъ одна, двѣ или три были второго рода, то мы имѣли бы, какъ въ п. 5:

$$\begin{aligned} \mu + \mu' + \mu'' &= n + 1 > n, \\ &= \frac{3n}{2} + 1 > \frac{5n}{4}, \\ &= 2n + 1 > \frac{3n}{2}, \end{aligned}$$

что невозможно.

Итакъ, положимъ, что мы имѣемъ три системы осей перваго рода. Тогда

$$n - 1 = \mu(\nu - 1) + \mu'(\nu' - 1) + \mu''(\nu'' - 1),$$

а, слѣдовательно,

$$\mu + \mu' + \mu'' = \frac{n}{2} + 1. \tag{6}$$

Отсюда слѣдуетъ, что изъ трехъ чиселъ ν, ν', ν'', по крайней мѣрѣ, одно должно быть равно 2; въ самомъ дѣлѣ, если бы всѣ эти три числа были больше 2, то числа μ, μ', μ'' не превышали бы числа $n/6$, а ихъ сумма не превышала бы $\frac{1}{2}n$; между тѣмъ, согласно соотношенію (5), она должна быть равна $\frac{1}{2}n + 1$. Итакъ, пусть $\nu'' = 2$, $\mu'' = \nu/4$; тогда

$$\mu + \mu' = \frac{n}{4} + 1. \tag{7}$$

Сообразно этому ν и ν', въ свою очередь, должны быть меньше 4, а μ' должно быть больше $n/8$, ибо иначе было бы $\mu + \mu' \leqq n/4$; такимъ образомъ, мы получаемъ два случая:

Во-первыхъ: $\nu' = 2$, $\mu' = n/4$, $\mu' = 1$, $\nu = n/2$:

IV. Двупирамидальное или діэдрическое вращеніе (съ основаніемъ четнаго порядка)

$$\mu = 1, \quad \nu = \tfrac{1}{2}n; \quad \mu' = \tfrac{1}{4}n, \quad \nu' = 2; \quad \mu'' = \tfrac{1}{4}n, \quad \nu'' = 2,$$

гдѣ n есть произвольное число, кратное 4.

Во-вторыхъ: $\nu' = 3,\ \mu' = n/6.$

$$\mu = \frac{n}{12} + 1, \quad \nu = \frac{6n}{n+12};$$

здѣсь, слѣдовательно, $\nu < 6$, а такъ какъ случай $\nu = 2$ уже исчерпанъ системой IV, то остаются случаи $\nu = 3,\ 4,\ 5$.

Однако, случай $\nu = 3$ не можетъ имѣть мѣста, такъ какъ тогда было бы:

$$n = 12, \quad \nu = 3, \quad \nu' = 3, \quad \nu'' = 2,$$
$$\mu = 2, \quad \mu' = 2, \quad \mu'' = 3.$$

Если поэтому a и a_1 суть тѣ двѣ сопряженныя оси, которыя соотвѣтствуютъ случаю $\nu = 3$, $\mu = 2$, то въ системѣ S должно было бы существовать вращеніе ϑ, а при повтореніи этого вращенія ось a_1 должна принять противоположное направленіе a. Поэтому ϑ должно быть вращеніемъ, по меньшей мѣрѣ, 4-ой кратности. Но въ системѣ S вращеніе 4-ой или болѣе высокой кратности не можетъ имѣть мѣста.

При $\nu = 4$ имѣемъ:

$$n = 24, \quad \nu = 4, \quad \nu' = 3, \quad \nu'' = 2,$$
$$\mu = 3, \quad \mu' = 4, \quad \mu'' = 6:$$

V. Октаэдрическое или кубическое вращеніе.

Наконецъ, при $\nu = 5$:

$$n = 60, \quad \nu = 5, \quad \nu' = 3, \quad \nu'' = 2,$$
$$\mu = 6, \quad \mu' = 10, \quad \mu'' = 15:$$

VI. Икосаэдрическое или додекаэдрическое вращеніе.

9. Болѣе трехъ системъ сопряженныхъ осей вообще быть не можетъ. Въ самомъ дѣлѣ:

для системъ перваго рода: $\mu(\nu - 1) = \frac{n}{2} - \mu \geqq \frac{n}{4}$,

" " второго рода: $\mu(\nu - 1) = n - \mu \geqq \frac{n}{2}$;

слѣдовательно, во всякомъ случаѣ $\mu(\nu - 1) \geqq \nu/4$. Если бы поэтому въ правой части равенства

$$n - 1 = \mu(\nu - 1) + \mu'(\nu' - 1) + \mu''(\nu'' - 1) + \cdots$$

было болѣе трехъ слагаемыхъ, то мы пришли бы къ противорѣчивому соотношенію $n - 1 \geqq n$.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что число различныхъ типовъ, которые могутъ встрѣтиться, необходимо ограничено. Въ томъ же, что всѣ эти случаи дѣйствительно могутъ имѣть мѣсто, мы убѣждаемся слѣдующими геометрическими соображеніями.

Уже названія, которыми мы обозначили различныя группы вращеній показываютъ, какимъ путемъ онѣ могутъ быть осуществлены. Такъ, напримѣръ, группу пирамидальныхъ вращеній (I) мы получаемъ, если построимъ правильную прямую пирамиду на правильномъ m-угольникѣ. Тогда имѣется только одна ось, именно, перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, и m вращеній, приводящихъ это тѣло въ совмѣщеніе съ самимъ собой.

Если мы теперь возьмемъ двойную пирамиду, т. е. двѣ пирамиды, симметрично расположенныя съ двухъ сторонъ общаго основанія, каковымъ служитъ правильный m-угольникъ, то къ m вращеніямъ вокругъ прямой, соединяющей вершины, присоединяются еще другія вращенія. Если m есть число нечетное, то прямыя, соединяющія вершины основанія съ серединами соотвѣтственныхъ противоположныхъ сторонъ, представляютъ собой систему сопряженныхъ двойныхъ осей второго рода, и мы приходимъ къ случаю (II). Если же m есть четное число, то прямыя, соединяющія противоположныя вершины, и прямыя, соединяющія середины противоположныхъ сторонъ, образуютъ двѣ системы сопряженныхъ осей перваго рода по m осей въ каждой. Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ случаю (IV).

Вмѣсто двойной пирамиды можно взять также діэдръ, т. е. правильный многоугольникъ, который мы представляемъ себѣ въ видѣ тѣла, считая двѣ его стороны за различныя поверхности.

§ 96. Эйлерова теорема о многогранникахъ.

1. Подъ многогранникомъ мы будемъ разумѣть тѣло, которое со всѣхъ сторонъ ограничено плоскими многоугольниками, нигдѣ не пересѣкающими другъ друга (Эйлеровы многогранники). Такъ называемые звѣздные многогранники, грани которыхъ другъ друга пересѣкаютъ, мы исключаемъ изъ разсмотрѣнія. Относительно Эйлеровыхъ многогранниковъ имѣетъ мѣсто знаменитая Эйлерова формула, устанавливающая связь между числомъ граней F, числомъ реберъ K и числомъ вершинъ E:

$$E + F - K = 2\,^{*}). \qquad (1)$$

Доказательство мы проведемъ на основаніи слѣдующихъ соображеній.

2. Если мы возьмемъ кусокъ поверхности, развернутой на плоскости, который эту плоскость однократно покрываетъ и ограниченъ замкнутой непрерывной линіей, то всякій разрѣзъ, проходящій отъ одной точки на периферіи къ другой, раздѣляетъ его на два отдѣльныхъ куска; такой кусокъ поверхности называется поэтому односвязнымъ. Это свойство

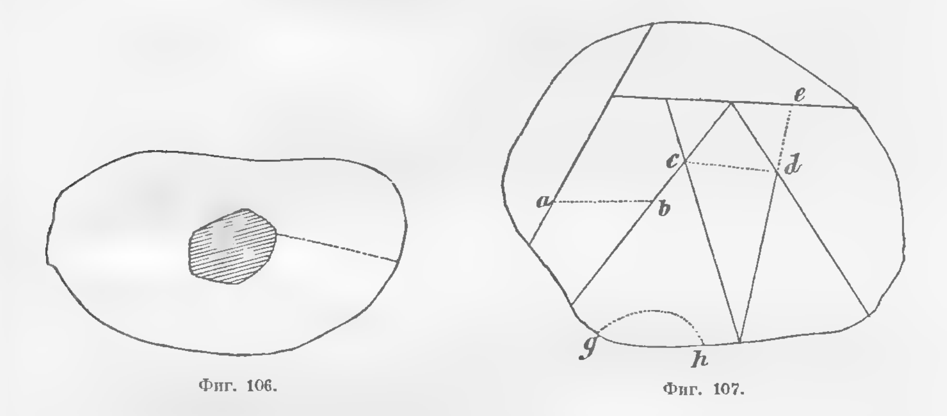
*) Бальцеръ предполагаетъ, что эта формула была уже извѣстна въ древности и во всякомъ случаѣ устанавливаетъ, что ею владѣлъ Декартъ. Она была вновь найдена и опубликована Эйлеромъ въ 1752 году.

сохранится, если мы снимемъ этотъ кусокъ поверхности съ плоскости и будемъ его безъ разрыва и складокъ сгибать.

Такіе куски поверхности, которые такимъ разрѣзомъ не раздѣляются, называются многосвязными. Сюда относятся, напримѣръ, кольцеобразныя поверхности (фиг. 106). Это поверхности двусвязныя, ибо можно сдѣлать одинъ разрѣзъ, который не раздѣляетъ поверхности.

Положимъ, что такого рода поверхность (односвязная или многосвязная) рядомъ какихъ-либо линій разрѣзана на односвязныя части (полости). Положимъ, что число этихъ полостей равно f; точки, изъ которыхъ выходятъ три или большее число разрѣзовъ, называются узловыми точками. Пусть число ихъ будетъ e, при чемъ мы, однако, сюда не включаемъ тѣхъ точекъ, которыя лежатъ на самой периферіи.

Отрѣзки, соединяющіе такія двѣ узловыя точки, между которыми нѣтъ другихъ узловыхъ точекъ, а также отрѣзки, соединяющіе узловую точку



Фиг. 106. Фиг. 107.

съ периферической или двѣ периферическія, мы будемъ называть нитями; пусть число ихъ будетъ k. Если нить соединяетъ двѣ периферическія точки, то она вовсе не содержитъ узловъ. На фигурѣ 107 (не считая пунктировъ) $f = 8$, $e = 5$, $k = 12$. Если мы присоединимъ новую нить къ тѣмъ, которыя уже существуютъ, то число f переходитъ въ $f + 1$ (ибо поверхности суть односвязныя). Новая нить имѣетъ два конца; можетъ случиться, что каждый изъ этихъ концовъ лежитъ въ имѣющемся уже узлѣ; она тогда не увеличиваетъ числа узловъ и не измѣняетъ имѣющихся уже нитей; то же самое имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда каждый изъ концовъ нити лежитъ на периферіи. Конечная точка новой нити можетъ, наконецъ, лежать внутри одной изъ прежнихъ нитей; тогда она раздѣляетъ послѣднюю на двѣ нити, но зато она увеличиваетъ также число узловъ на 1. Такимъ образомъ, разность $e - k$ при появленіи такого рода новой конечной точки остается безъ измѣненія. Но въ число k входитъ еще и вновь присоединенная нить, а потому новый разрѣзъ

оставляетъ безъ измѣненія выраженіе $e+f-k$. Разлчные случаи, которые тутъ могутъ представиться, отмѣчены пунктиромъ на фиг. 107.

Если первоначальную поверхность S мы будемъ считать односвязной, то до производства какихъ бы то ни было разрѣзовъ $e=0$, $f=1$, $k=0$; слѣдовательно, вообще

$$e+f-k=1 \text{ *}), \qquad (2)$$

3. Отсюда вытекаетъ Эйлерова теорема о многогранникѣ слѣдующимъ образомъ. Изъ многогранной поверхности, содержащей F граней E вершинъ и K сторонъ, вырѣжемъ одну изъ его граней, представляющую собой, скажемъ, m-угольникъ. Въ такомъ случаѣ остается поверхность S, ограниченная периферіей m-угольника и разрѣзаемая остальными ребрами многогранника на односвязныя части (многоугольники). Въ этомъ разложеніи

$$e=E-m, \quad k=K-m, \quad f=F-1,$$

а потому изъ соотношенія (2) вытекаетъ формула (1).

§ 97. Правильные многогранники.

1. Съ помощью Эйлеровой формулы мы можемъ, прежде всего, отвѣтить на вопросъ, существуютъ ли многогранники, въ которыхъ всѣ грани имѣютъ одинаковое число вершинъ и изъ всѣхъ вершинъ выходитъ одинаковое число реберъ.

Итакъ, положимъ, что всѣ грани нѣкотораго многогранника представляютъ собой p-угольники, и что въ каждой вершинѣ сходится q реберъ.

Такъ какъ на каждомъ ребрѣ находятся двѣ грани и каждая грань содержитъ p реберъ, то

$$pF=2K, \qquad (1)$$

и точно такъ же

$$qE=2K, \qquad (2)$$

а потому, согласно формулѣ Эйлера (§ 96, (1)),

$$K\left(\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1\right)=2; \qquad (3)$$

отсюда, прежде всего, слѣдуетъ, что

$$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}>1; \qquad (4)$$

а такъ какъ каждое изъ чиселъ p и q должно быть, по меньшей мѣрѣ, равно 3, то

$$\frac{2}{p}>1-\frac{2}{q}>\frac{1}{3}, \quad p<6$$

---

*) Вообще $k-e-f+2$ выражаетъ порядокъ связности поверхности S.

и точно такъ же $q < 6$. Такимъ образомъ, для p и q остаются еще значенія 3, 4 и 5, и изъ соотношеній (1) — (4) мы получаемъ слѣдующіе возможные случаи:

p	q	K	E	F	
3	3	6	4	4	Тетраэдръ
3	4	12	6	8	Октаэдръ
3	5	30	12	20	Икосаэдръ
4	3	12	8	6	Гексаэдръ
5	3	30	20	12	Додекаэдръ

2. Если мы, сверхъ того, примемъ, что грани всѣхъ этихъ многогранниковъ суть правильные конгруэнтные многоугольники, то мы получимъ пять правильныхъ (такъ называемыхъ Платоновыхъ) тѣлъ. Вершины этихъ многогранниковъ лежатъ на сферѣ; если мы проведемъ плоскости черезъ центръ сферы и черезъ ребра, то мы получимъ такъ называемыя правильныя сферическія сѣтки, изъ которыхъ можно обратно получить правильныя тѣла, замѣняя правильные сферическіе многоугольники плоскими многоугольниками съ тѣми же вершинами *).

3. Эти тѣла даютъ намъ примѣры для остальныхъ трехъ группъ вращенія и соотвѣтствующихъ сопряженныхъ осей, къ которымъ мы пришли въ § 95-омъ.

Тетраэдръ даетъ намъ группу III: $n = 12$; двѣ системы сопряженныхъ осей, именно четыре высоты (оси второго рода, $\mu = 4$, $\nu = 3$) и три прямыя, соединяющія середины противолежащихъ реберъ (оси перваго рода, $\mu = 3$, $\nu = 2$).

Кубъ и октаэдръ даютъ группу V ($n = 24$) съ тремя системами сопряженныхъ осей перваго рода $\mu = 3$, $\nu = 4$ (прямыя, соединяющія центры противоположныхъ граней куба), $\mu = 6$, $\nu = 2$ (прямыя, соединяющія середины противоположныхъ реберъ куба), $\mu = 4$, $\nu = 3$ (діагонали куба). Октаэдръ даетъ ту же группу вращеній.

Икосаэдръ и додекаэдръ даютъ группу VI ($n = 60$); системы сопряженныхъ осей для икосаэдра суть: $\mu = 15$, $\nu = 2$ (прямыя, соединяющія середины противолежащихъ реберъ), $\mu = 6$, $\nu = 5$ (главныя

*) Богатый матеріалъ по этому вопросу можно найти въ сочиненіяхъ: Edmund Hess, „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung“, Leipzig, Teubner, 1883, и Max Brückner, „Vielecke und Vielflache“, Leipzig, 1900; въ послѣднемъ сочиненіи много изящныхъ рисунковъ. Дополненіе къ послѣднему сочиненію имѣется въ трудахъ Гейдельбергскаго конгресса, стр. 707.

Кто недостаточно владѣетъ пространственными представленіями, тому трудно будетъ обойтись безъ моделей.

діагонали), $\mu = 10$, $\nu = 3$ (прямыя, соединяющія центры противоположныхъ граней); то же имѣетъ мѣсто и въ случаѣ додекаэдра.

Само собой разумѣется, что тѣ же группы можно осуществить безчисленнымъ множествомъ другихъ способовъ.

Такъ мы получаемъ, напримѣръ, ромбоэдрическій додекаэдръ (гранатоэдръ въ минералогіи), срѣзывая ребра куба или же ребра октаэдра; это тѣло имѣетъ поэтому ту же группу вращеній, что и кубъ или октаэдръ. Срѣзывая ребра икосаэдра или пятиугольнаго додекаэдра, мы получаемъ ромбоэдрическій тридцатигранникъ, имѣющій группу икосаэдра.

ГЛАВА XI.

Аналитическая геометрія въ пространствѣ.

§ 98. Координаты.

1. Подобно тому, какъ въ плоскости положеніе точки опредѣляется двумя координатами, такъ въ пространствѣ для опредѣленія положенія точки необходимо произвести три измѣренія. Чтобы это выяснить, представимъ себѣ, что изъ неподвижной точки, изъ такъ называемой нулевой точки, или начала O, выходятъ три прямыя, не лежащія въ одной плоскости. Эти прямыя опредѣляютъ попарно три плоскости, образующія трехгранный уголъ. Если мы представимъ себѣ эти прямыя продолженными безпредѣльно въ обѣ стороны, то проходящія черезъ нихъ плоскости дѣлятъ пространство на 8 частей (октантовъ).

Мы обозначимъ наши три прямыя черезъ x, y и z, а ихъ продолженія черезъ $-x$, $-y$, $-z$; три плоскости мы соотвѣтственно назовемъ плоскостями yz-овъ, zx-овъ и xy-овъ.

8 октантовъ могутъ быть тогда отличены знаками слѣдующимъ образомъ:

1) $+x, \quad +y, \quad +z,$
2) $x, \quad +y, \quad +z,$
3) $+x, \quad -y, \quad +z,$
4) $+x, \quad +y, \quad -z,$
5) $+x, \quad -y, \quad -z,$
6) $-x, \quad +y, \quad -z,$
7) $-x, \quad -y, \quad +z,$
8) $-x, \quad -y, \quad -z.$

Въ этомъ именно порядкѣ мы и будемъ называть ихъ 1-ымъ, 2-ымъ, $\cdots$, 8-ымъ октантомъ. Первый мы будемъ называть также положительнымъ октантомъ. Два октанта, которыхъ знаки всѣ противоположны, соприкасаются только въ одной точкѣ — въ началѣ; такіе октанты на-

зываются **противоположными** (или вертикальными). Каждые два непротивоположныхъ октанта соприкасаются либо по прямой линіи, либо по плоскости.

Вся система этихъ линій и плоскостей называется **системой координатъ**. Ребра называются **осями координатъ**, а плоскости — **координатными плоскостями**.

Такъ какъ три элемента допускаютъ 6 перестановокъ, то ребра положительнаго октанта можно обозначить литерами x, y, z шестью различными способами. Но эти способы обозначенія распадаются на два класса, одинъ изъ которыхъ даетъ **правыя системы**, а другой — **лѣвыя** (§ 84, 3). Впредь мы всегда будемъ принимать, что оси x, y, z образуютъ правую систему; въ такомъ случаѣ

$$\left.\begin{matrix} x, y, z \\ y, z, x \\ z, x, y \end{matrix}\right\} \text{суть правыя системы,} \qquad \left.\begin{matrix} x, z, y \\ y, x, z \\ z, y, x \end{matrix}\right\} \text{суть лѣвыя системы.}$$

Если три оси взаимно перпендикулярны, то система называется **прямоугольной**. Прямоугольная система даетъ наиболѣе простые результаты, а потому ею и пользуются почти исключительно.

2. Чтобы опредѣлить положеніе какой-либо точки P относительно данной системы координатъ, проведемъ черезъ нее плоскости, параллельныя плоскостямъ координатъ. Эти плоскости образуютъ съ координатными плоскостями параллелопипедъ, ребра котораго по четыре параллельны осямъ координатъ. Эти ребра мы будемъ измѣрять какой-нибудь единицей мѣры и соотвѣтствующія числа снабдимъ знаками сообразно октанту, въ которомъ точка лежитъ. Эти числа мы и будемъ называть **координатами точки** P. Чтобы убѣдиться, что любыя три значенія x, y, z координатъ опредѣляютъ одну и только одну точку, нанесемъ отрѣзокъ x на оси x-овъ въ направленіи, указанномъ знакомъ; черезъ конечную точку полученнаго такимъ образомъ отрѣзка проведемъ отрѣзокъ y, параллельный оси y-овъ опять-таки въ направленіи, указанномъ знакомъ. Наконецъ, черезъ конечную точку этого отрѣзка, лежащую въ плоскости xy-овъ, проведемъ отрѣзокъ z, параллельный оси z-овъ. Конецъ послѣдняго и представляетъ собой точку P. Если бы мы выполнили то же построеніе въ другомъ порядкѣ координатъ, то мы пришли бы къ той же точкѣ P. Во всякомъ случаѣ, чтобы придти къ точкѣ P, исходя отъ нулевой точки, нужно пройти ломанную линію, состоящую изъ трехъ послѣдовательныхъ реберъ упомянутаго выше параллелопипеда.

Если система координатъ прямоугольная, то на координаты можно смотрѣть, какъ на перпендикуляры, опущенные изъ точки P на плоскости координатъ.

Такъ какъ всякое измѣненіе координатъ мѣняетъ также точку P, то три числовыя данныя, опредѣляющія положеніе точки, называются независимыми другъ отъ друга.

Такъ какъ необходимы три такія независимыя данныя, то говорятъ: совокупность точекъ пространства образуетъ трехкратно протяженное многообразіе; или иначе: пространство содержитъ ∞^3 точекъ.

Это есть точное выраженіе факта, что пространство имѣетъ три измѣренія.

3. Указанный выше способъ опредѣленія положенія точки въ пространствѣ называется Декартовымъ. Однако, положеніе точки въ пространствѣ можно опредѣлить также безконечнымъ множествомъ другихъ способовь, изъ которыхъ, однако, мы здѣсь остановимся только на полярныхъ координатахъ, въ виду того, что послѣднія очень часто примѣняются.

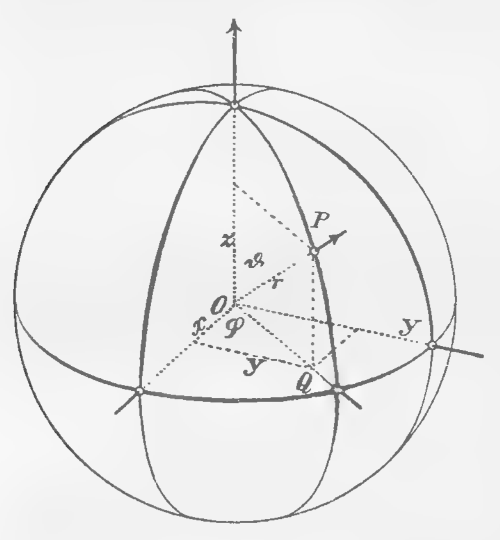
Мы выбираемъ прежде всего неподвижную точку, которую мы назовемъ полюсомъ или нулевой точкой системы координатъ. Чтобы опредѣлить положеніе точки, мы прежде всего измѣряемъ ея разстояніе отъ полюса. Это разстояніе выражается числомъ, которое можетъ имѣть любое положительное значеніе; отрицательныя значенія для этого измѣренія никакого смысла не имѣютъ. Значеніе 0 отвѣчаетъ только самому полюсу. Мы обозначимъ полюсъ черезъ O, перемѣнную точку черезъ P, а разстояніе OP черезъ r. Это разстояніе есть первая изъ трехъ полярныхъ координатъ. Всѣ точки, для которыхъ r имѣетъ одно и то же значеніе, образуютъ сферическую поверхность радіуса r, центромъ которой служитъ полюсъ.

Чтобы теперь различать точки на одной изъ такихъ сферъ, мы прежде всего введемъ нѣкоторую постоянную прямую, проходящую черезъ полюсъ, которую мы назовемъ полярной осью; на ней мы выберемъ опредѣленное направленіе за положительное и въ качествѣ второй координаты будемъ измѣрять уголъ, который лучъ, идущій къ точкѣ P, образуетъ съ полярною осью. Этотъ уголъ, который мы обозначимь черезъ ϑ, мы возьмемь между 0^0 и 180^0. Всѣ точки, которымь соотвѣтствуетъ одно и то же значеніе ϑ, лежать на конической поверхности, но заполняютъ только одну полу этой поверхности; другой же полѣ соотвѣтствуеть значеніе, дополняющее ϑ до 180^0. Значенія $\vartheta = 0^0$ и $\vartheta = 180^0$ соотвѣтствуютъ положительному и отрицательному направленіямъ полярной оси. Углу $\vartheta = 90^0$ отвѣчаетъ плоскость, которую мы будемъ называть экваторіальной плоскостью.

Эти коническія поверхности пересѣкаются съ упомянутыми выше сферами по окружностямъ, которыя называются параллелями на

сферѣ (напримѣръ, на поверхности земли или на сводѣ небесномъ). Полярная ось пересѣкаетъ сферу въ двухъ точкахъ въ сѣверномъ и южномъ полюсѣ. Экваторіальная плоскость пересѣкаетъ сферу по экватору. Уголъ ϑ называется полярнымъ разстояніемъ. Дополнительный уголъ при измѣреніяхъ на земной поверхности называютъ географической широтой.

Чтобы, наконецъ, опредѣлить положеніе точки P на ея параллели, выберемъ произвольно нѣкоторую опредѣленную полуплоскость, проходящую черезъ полярную ось, которую мы назовемъ начальнымъ меридіаномъ или нулевымъ меридіаномъ. Далѣе, черезъ точку P и полярную ось мы также проведемъ полуплоскость и за третью полярную координату примемъ уголъ φ между этими двумя полуплоскостями, отсчитывая его въ опредѣленномъ направленіи (напримѣръ, къ востоку) отъ 0^0 до 360^0. Можно также отсчитывать отъ 0^0 до 180^0, считая уголъ φ положительнымъ въ одномъ направленіи, а въ другомъ отрицательнымъ (восточная и западная долгота). Всѣ точки, соотвѣтствующія тому же углу φ, лежатъ въ одной меридіональной плоскости, вѣрнѣе, въ одной полуплоскости, проходящей черезъ полярную ось. Эти плоскости пересѣкаютъ сферу по окружностямъ большихъ круговъ, проходящимъ черезъ полюсы; въ географіи онѣ называются меридіанами.



Фиг. 108.

4. Чтобы выразить прямоугольныя координаты точки P черезъ полярныя, выберемъ полярную ось за ось z-овъ, экваторъ за плоскость xy-овъ, начальный меридіанъ за плоскость xz-овъ и, наконецъ, положительное направленіе y-овъ возьмемъ къ востоку (фиг. 108). Если мы изъ точки P опустимъ перпендикуляръ на экваторіальную плоскость, основаніемъ котораго служитъ точка Q, то OQP есть прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго равна r, а катеты z и ϱ. Тогда $z = r\cos\vartheta$, $\varrho = r\sin\vartheta$, а x и y представляютъ собой въ то же время координаты точки P въ плоскости xy-овъ. Отсюда слѣдуетъ:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\vartheta.$$

§ 99. Направленія въ пространствѣ.

1. Пусть двѣ точки P и P_0 заданы прямоугольными координатами $x, y, z;\ x_0, y_0, z_0$. Разстояніе PP_0 мы обозначимъ черезъ r и направленіе этого отрѣзка будемъ считать положительнымъ отъ P_0 къ P.

Если мы черезъ обѣ эти точки проведемъ плоскости, параллельныя плоскостямъ координатъ, то мы получимъ прямоугольный параллелопипедъ, ребра котораго представляютъ собой проекціи отрѣзка r на оси координатъ. Эти проекціи по величинѣ и по знаку выражаются разностями $x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0$. Примѣняя тогда дважды теорему Пиѳагора, мы получаемъ:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \qquad (1)$$

Если черезъ α, β, γ обозначимъ углы, которые прямая P_0P образуетъ съ положительными направленіями осей координатъ, то

$$\begin{aligned} x - x_0 &= r\cos\alpha, \\ y - y_0 &= r\cos\beta, \\ z - z_0 &= r\cos\gamma; \end{aligned} \qquad (2)$$

въ виду соотношеній (1) отсюда слѣдуетъ, что

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1. \qquad (3)$$

Эта формула остается, очевидно, въ силѣ, если α, β, γ суть углы, которые произвольная прямая g образуетъ съ осями координатъ.

2. Величины

$$a = \cos\alpha, \quad b = \cos\beta, \quad c = \cos\gamma,$$

связанныя соотношеніемъ

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad (4)$$

называются направляющими косинусами прямой g.

Любыя три величины a, b, c, связанныя соотношеніемъ (4), въ качествѣ направляющихъ косинусовъ всегда опредѣляютъ одно направленіе; это направленіе можно представить прямой, выходящей изъ начала.

Въ самомъ дѣлѣ, если примемъ эти величины a, b, c за координаты точки P, то послѣдняя, согласно соотношенію (1), имѣетъ отъ начала координатъ разстояніе, равное 1, и прямая OP, въ виду соотношеній (2), имѣетъ направляющіе косинусы a, b, c.

3. Положимъ теперь, что намъ даны два направленія:

$$a_1, b_1, c_1; \quad a_2, b_2, c_2;$$

изъ начала координатъ мы проведемъ два луча l_1, l_2. Пусть (l_1, l_2) будетъ уголъ, который образуютъ эти два направленія.

Если на лучахъ l_1, l_2 отъ точки O отложимъ соотвѣтственно разстоянія r_1, r_2, то мы получимъ двѣ точки 1, 2, координаты которыхъ, согласно соотношенію (2), равны: $r_1 a_1$, $r_1 b_1$, $r_1 c_1$; $r_2 a_2$, $r_2 b_2$, $r_2 c_2$. Вмѣстѣ съ тѣмъ, если обозначимъ черезъ (1, 2) разстояніе нашихъ двухъ точекъ, то по формулѣ (1)

$$(1,\ 2)^2 = (r_1 a_1 - r_2 a_2)^2 + (r_1 b_1 - r_2 b_2)^2 + (r_1 c_1 - r_2 c_2)^2$$
$$= r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2).$$

Съ другой стороны, согласно теоремѣ косинусовъ (§ 28, 4),

$$(1,\ 2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(l_1,\ l_2).$$

Сравненіе же обѣихъ формулъ даетъ результатъ:

$$\cos(l_1,\ l_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2. \tag{5}$$

Условіе, чтобы оба направленія были взаимно перпендикулярны, выражается поэтому равенствомъ:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0. \tag{6}$$

4. Мы разсмотримъ еще площадь Δ треугольника (0, 1, 2). Если мы спроектируемъ треугольникъ Δ на плоскости координатъ, то мы получимъ три проекціи Δ_x, Δ_y, Δ_z, которыя, согласно п. 6 § 57-го, имѣютъ значенія:

$$\begin{aligned} 2\Delta_x &= r_1 r_2 (b_1 c_2 - c_1 b_2), \\ 2\Delta_y &= r_1 r_2 (c_1 a_2 - a_1 c_2), \\ 2\Delta_z &= r_1 r_2 (a_1 b_2 - b_1 a_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Каждая изъ этихъ проекцій имѣетъ положительное или отрицательное значеніе, смотря по тому, соотвѣтствуетъ ли въ этой проекціи направленіе (0, 1, 2) положительному или отрицательному обходу периферіи.

Проведемъ нормаль n къ плоскости (0, 1, 2) и направимъ ее такимъ образомъ, чтобы лучи 1, 2, n составляли правую систему, предполагая, что таковую образуютъ и координатныя оси. Въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть по величинѣ и по знаку:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \Delta \cos(n,\ x), \\ \Delta_y &= \Delta \cos(n,\ y), \\ \Delta_z &= \Delta \cos(n,\ z). \end{aligned} \tag{8}$$

Чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно привести систему 1, 2, n въ совпаденіе съ системой xyz, или съ yzx, или съ zxy; отсюда вытекаетъ соотношеніе

$$\Delta^2 = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2, \tag{9}$$

въ которомъ легко узнать обобщеніе теоремы Пиѳагора. Замѣчательно, что величины, о которыхъ идетъ рѣчь, именно квадраты площадей въ трехмѣрномъ пространствѣ, уже не поддаются наглядному истолкованію; поэтому прямое геометрическое доказательство, по аналогіи съ доказательствомъ теоремы Пиѳагора, здѣсь невозможно. Но, какъ извѣстно изъ тригонометріи, (§ 31, (6)):

$$2\Delta = r_1 r_2 \sin(l_1, l_2);$$

возводя это въ квадратъ и пользуясь соотношеніями (7) и (9), получаемъ:

$$\sin^2(l_1, l_2) = (b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 + (c_1 a_2 - a_1 c_2)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2. \quad (10)$$

Такъ какъ уголъ (l_1, l_2) содержится между 0 и π, то $\sin(l_1, l_2)$ имѣетъ положительное значеніе; эту формулу можно получить также путемъ вычисленія изъ соотношенія (5).

5. Теперь мы можемъ также рѣшить задачу объ опредѣленіи направленія n, перпендикулярнаго къ двумъ направленіямъ l_1 и l_2. Въ самомъ дѣлѣ, пусть α, β, γ будутъ направляющіе косинусы прямой n; въ такомъ случаѣ они, согласно соотношеніямъ (6) и (4), удовлетворяютъ тремъ условіямъ:

$$\begin{aligned} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 &= 0, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 &= 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Изъ первыхъ двухъ уравненій мы находимъ отношенія $\alpha : \beta : \gamma$ (г. I, § 41):

$$(b_1 c_2 - c_1 b_2) : (c_1 a_2 - a_1 c_2) : (a_1 b_2 - b_1 a_2);$$

если же мы изъ соотношенія (10) опредѣлимъ коэффиціентъ пропорціональности, то послѣднее изъ уравненій (11), въ виду соотношенія (10), дастъ:

$$\begin{aligned} \alpha \sin(l_1, l_2) &= b_1 c_2 - c_1 b_2, \\ \beta \sin(l_1, l_2) &= c_1 a_2 - a_1 c_2, \\ \gamma \sin(l_1, l_2) &= a_1 b_2 - b_1 a_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Знакъ въ этихъ формулахъ измѣнится, если мы замѣстимъ другъ другомъ лучи l_1 и l_2 или замѣнимъ одно изъ трехъ направленій l_1, l_2, n противоположнымъ.

Чтобы опредѣлить знакъ, мы будемъ считать $\sin(l_1, l_2)$ положительнымъ; если мы тогда проведемъ лучи l_1, l_2, n въ совпаденіе съ осями x, y, z, то послѣдняя изъ формулъ (12) приводитъ къ тождеству $1 = 1$ итакъ:

Формулы (12) вѣрны, если (l_1, l_2, n) и (x, y, z) суть системы одного рода, т. е., при нашемъ допущенiи относительно координатныхъ осей, если l_1, l_2, n есть правая система.

6. Формулами, которыя мы здѣсь вывели, можно, между прочимъ, воспользоваться, чтобы аналитическимъ путемъ получить основныя положенiя сферической тригонометрiи. Мы хотимъ провести это на теоремѣ косинусовъ, изъ которой, какъ было показано выше, можно вывести остальныя формулы.

Возьмемъ трехгранный уголъ съ двугранными углами a, b, c и плоскими углами α, β, γ; всѣ эти углы мы будемъ считать меньше π. Три ребра мы обозначимъ черезъ l_1, l_2, l_3, и при томъ такъ, чтобы (l_1, l_2, l_3) представляло правую систему. Наконецъ, проведемъ перпендикуляры n_1, n_2, n_3 къ гранямъ въ такомъ направленiи, чтобы (l_2, l_3, n_1), (l_3, l_1, n_2), (l_1, l_2, n_3) были правыя системы; тогда и (n_1, n_2, n_3) есть правая система.

Мы примемъ, что:

l_1	имѣетъ	направляющiе	косинусы	$a_1, b_1, c_1,$
l_2	„	„	„	$a_2, b_2, c_2,$
l_3	„	„	„	$a_3, b_3, c_3,$
n_1	„	„	„	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$
n_2	„	„	„	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2,$
n_3	„	„	„	$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3,$

Въ такомъ случаѣ формулы (12) дадутъ:

$$\alpha_2 \sin b = b_3 c_1 - c_3 b_1, \quad \alpha_3 \sin c = b_1 c_2 - c_1 b_2,$$
$$\beta_2 \sin b = c_3 a_1 - a_3 c_1, \quad \beta_3 \sin c = c_1 a_2 - a_1 c_2,$$
$$\gamma_2 \sin b = a_3 b_1 - b_3 a_1, \quad \gamma_3 \sin c = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Перемножая эти формулы попарно и складывая, мы получимъ:

$$\cos a \sin b \sin c = \Sigma (b_3 c_1 - c_3 b_1)(b_1 c_2 - c_1 b_2).$$

Въ правой части этого равенства знакъ суммы распространяется на три члена, которые получаются изъ перваго круговой перестановкой буквъ a, b, c. Если вычислимъ эту сумму, то получимъ:

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)(a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3)$$
$$(a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2),$$

а потому, согласно соотношенiю (4) и (5),

$$\cos a \sin b \sin c = \cos b \cos c \quad \cos a;$$

это и есть теорема косинусовъ на сферѣ (§ 41).

§ 100. Уравненіе плоскости.

1. Плоскость вполнѣ опредѣлена, если дана длина δ перпендикуляра, опущеннаго на нее изъ начала координатъ, и углы α, β, γ, которые этотъ перпендикуляръ образуетъ съ осями. Эти углы должны быть связаны соотношеніемъ (4) § 99-го.

Положимъ теперь, что, кромѣ этой плоскости e, дана точка P съ координатами x, y, z; найдемъ нормальное разстояніе d этой точки отъ плоскости. Отрѣзокъ OP, длину котораго мы обозначимъ черезъ r, имѣетъ направляющіе косинусы x/r, y/r, z/r (§ 99, (2)). Вслѣдствіе этого, согласно § 99, (5):

$$r\cos(\delta, r) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \tag{1}$$

Если мы будемъ считать разстояніе d положительнымъ въ томъ случаѣ, когда точка P расположена относительно плоскости не со стороны точки O, а съ противоположной, то $d + \delta = r\cos(\delta, r)$; поэтому

$$d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta. \tag{2}$$

Но если плоскость e проходитъ черезъ самое начало координатъ, то мы произвольно примемъ одну изъ двухъ сторонъ плоскости e за положительную и будемъ считать $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ за направляющіе косинусы нормали, направленной въ положительную сторону плоскости. Въ такомъ случаѣ d имѣетъ положительное значеніе, если точка P лежитъ съ положительной стороны плоскости e.

2. Если $d = 0$, то точка P лежитъ на плоскости e; сообразно этому

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0 \tag{3}$$

есть уравненіе плоскости e, и при томъ въ нормальномъ видѣ. Вмѣстѣ съ тѣмъ, мы получаемъ, какъ для уравненія прямой въ плоскости, теорему:

Если мы въ уравненіе плоскости въ нормальномъ видѣ подставимъ координаты точки P, то мы получимъ разстояніе точки P отъ плоскости.

3. Умножая уравненіе (3) на постояннаго множителя, отличнаго отъ нуля, мы получимъ уравненіе плоскости въ общемъ видѣ

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{4}$$

и совершенно такъ же, какъ и въ геометріи на плоскости, мы докажемъ, что каждое уравненіе первой степени относительно x, y, z выражаетъ плоскость. Характернымъ для нормальной формы является соотношеніе

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Другой частный видъ уравненія плоскости, къ которому оно всегда можетъ быть приведено, если только плоскость не проходитъ черезъ начало координатъ, есть уравненіе въ отрѣзкахъ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \qquad (5)$$

Здѣсь a, b, c суть отрѣзки, которые плоскость опредѣляетъ на осяхъ координатъ.

§ 101. Объемъ тетраэдра.

Положимъ, что четыре точки въ пространствѣ 0, 1, 2, 3 заданы своими координатами. Требуется вычислить обьемъ тетраэдра, вершинами котораго служатъ эти четыре точки. Ради простоты мы примемъ точку 0 за начало координатъ и размѣтимъ остальныя точки такъ, чтобы лучи 01, 02, 03 составляли правую систему. Если мы затѣмъ проведемъ нормаль n къ плоскости (012), какъ мы это дѣлали въ п. 4 § 99-го, то точка 3 окажется съ положительной стороны этой плоскости. Если обозначимъ, какъ и тамъ, черезъ Δ площадь треугольника (1, 2, 3), а черезъ d перпендикуляръ изъ точки 3 на эту плоскость, то по § 100, (2):

$$d = x_3 \cos(nx) + y_3 \cos(ny) + z_3 \cos(nz). \qquad (1)$$

Согласно же формуламъ (7) и (8) § 99-го,

$$\begin{aligned} 2\Delta \cos(nx) &= y_1 z_2 - y_2 z_1, \\ 2\Delta \cos(ny) &= z_1 x_2 - z_2 x_1, \\ 2\Delta \cos(nz) &= x_1 y_2 - x_2 y_1; \end{aligned} \qquad (2)$$

съ другой стороны, объемъ тетраэдра $T = \frac{1}{3} d\Delta$; поэтому соотношенія (1) и (2) даютъ:

$$6T = x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) + y_3(z_1 x_2 - z_2 x_1) + z_3(x_1 y_2 - x_2 y_1). \qquad (3)$$

Согласно § 40 т. I-го, это выраженіе можно написать въ формѣ опредѣлителя:

$$6T = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Знакъ въ этомъ выраженіи также правиленъ въ предположеніи, что лучи (01), (02), (03) образуютъ правую систему (какъ и оси координатъ); въ противномъ случаѣ знакъ долженъ быть противоположный.

2. Если вмѣсто координатъ мы введемъ направляющіе косинусы, т. е. положимъ

$$x_i = r_i a_i, \quad y_i = r_i b_i, \quad z_i = r_i c_i,$$

а также

$$D = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix},$$

то, пользуясь теоремой объ умноженіи опредѣлителей, въ виду соотношеній (4) и (5) § 99-го, найдемъ:

$$D^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(12), & \cos(13) \\ \cos(21), & 1 & \cos(23) \\ \cos(31), & \cos(32), & 1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$= 1 - \cos^2(23) - \cos^2(31) - \cos^2(12) + 2\cos(23)\cos(31)\cos(12)$$

и

$$6\,T = r_1 r_2 r_3 D. \tag{6}$$

Здѣсь D есть та же самая величина, которую мы въ сферической тригонометріи назвали синусомъ вершины.

3. Объемъ тетраэдра или, вѣрнѣе, квадратъ этого объема можно выразить черезъ 6 реберъ тетраэдра; всѣ относящіяся сюда выраженія можно получить, основываясь на простыхъ свойствахъ опредѣлителя. Мы обозначимъ ребра такъ:

$$r_1 = (01), \quad r_2 = (02), \quad r_3 = (03),$$
$$\varrho_1 = (23), \quad \varrho_2 = (31), \quad \varrho_3 = (12).$$

Тогда, по теоремѣ косинусовъ плоской геометріи и вслѣдствіе соотношенія (5) § 99-го, получимъ:

$$\varrho_3^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(12),$$
$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(12) = \tfrac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 - \varrho_3^2);$$

аналогичныя формулы найдемъ для другихъ выраженій.

Если мы теперь возведемъ опредѣлитель (4) въ квадратъ и каждую горизонталь помножимъ на 2, то мы получимъ:

$$288\,T^2 = \begin{vmatrix} 2r_1^2, & r_1^2 + r_2^2 - \varrho_3^2, & r_1^2 + r_3^2 - \varrho_2^2 \\ r_2^2 + r_1^2 - \varrho_3^2, & 2r_2^2, & r_2^2 + r_3^2 - \varrho_1^2 \\ r_3^2 + r_1^2 - \varrho_2^2, & r_3^2 + r_2^2 - \varrho_1^2, & 2r_3^2 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Если мы здѣсь положимъ $T = 0$, то мы получимъ соотношеніе между шестью разстояніями четырехъ точекъ въ плоскости (§ 32, 2).

Если теперь къ опредѣлителю (7) присоединимъ четвертую и пятую вертикали

$$\begin{matrix} r_1^2 & 0 \\ r_2^2 & 0 \\ r_3^2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1, \end{matrix}$$

а также четвертую и пятую горизонтали

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & 0 & 1, \end{matrix}$$

то опредѣлитель не измѣнитъ своего значенія. Пользуясь же теоремой, согласно которой можно вычитать одну горизонталь изъ другой, не мѣняя значенія опредѣлителя, ему можно придать симметричную форму:

$$288\,T^2 = \begin{vmatrix} 0 & \varrho_3^2 & \varrho_2^2 & r_1^2 & 1 \\ \varrho_3^2 & 0 & \varrho_1^2 & r_2^2 & 1 \\ \varrho_2^2 & \varrho_1^2 & 0 & r_3^2 & 1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Въ этой формѣ ни одна изъ вершинъ не выдѣляется по сравненію съ другими.

§ 102. Поверхности 2-го порядка.

1. Если a, b, c суть координаты неподвижной точки P_0, а x, y, z - координаты точки P, если, далѣе, r есть данная длина, то уравненіе

$$k \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

выражаетъ условіе, чтобы точка P находилась на постоянномъ разстояніи r отъ точки P_0; это есть, такимъ образомъ, уравненіе сферы, имѣющей центръ въ точкѣ P_0 и радіусъ r. Въ раскрытомъ видѣ уравненіе (1) гласитъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0. \quad (2)$$

Относительно x, y, z это есть уравненіе 2-ой степени, а потому сфера принадлежитъ къ числу поверхностей 2-го порядка.

Обратно, каждое уравненіе 2-ой степени, въ которомъ члены 2-го порядка фигурируютъ только въ соединеніи $x^2 + y^2 + z^2$, представляетъ собой сферу. Эта сфера можетъ быть также мнимой, если въ уравненіи (1) r^2 имѣетъ отрицательное значеніе. При $r = 0$ сфера обращается въ точку.

2. Если мы въ выраженіе k подставимъ координаты x, y, z нѣкоторой точки P, не принадлежащей сферѣ и отстоящей отъ центра на разстояніи ϱ, то мы получимъ

$$k = \varrho^2 - r^2 = (\varrho - r)(\varrho + r);$$

это есть степень точки P относительно сферы k. Сюда примыкаютъ соображенія, подобныя тѣмъ, какія были изложены относительно окружности въ планиметріи; здѣсь мы не будемъ въ это входить.

3. Каждое уравненіе 2-ой степени вида

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

выражаетъ сферу, за исключеніемъ того случая, когда $A = 0$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ сфера вырождается въ плоскость. Если k и k' суть два выраженія вида (1), то $k - k' = 0$ есть уравненіе плоскости, которая называется радикальной плоскостью обѣихъ сферъ.

4. Если λ есть неопредѣленный параметръ, то уравненіе

$$k - \lambda k' = 0 \qquad (3)$$

представляетъ пучокъ сферъ. Всѣ сферы этого пучка имѣютъ ту же радикальную плоскость и проходятъ, если только онѣ вообще пересѣкаются въ дѣйствительныхъ точкахъ, черезъ одну и ту же окружность; эта окружность можетъ выродиться въ точку; тогда сферы пучка соприкасаются въ этой точкѣ. Если мы возьмемъ 3-ье выраженіе k'', которое не принадлежитъ пучку (3), и обозначимъ черезъ μ второй неопредѣленный параметръ, то

$$k + \lambda k' + \mu k'' = 0 \qquad (4)$$

есть уравненіе связки сферъ. Три сферы k, k', k'' пересѣкаются въ двухъ точкахъ, которыя могутъ быть дѣйствительными или мнимыми, а иногда могутъ также совпадать. Всѣ сферы пучка проходятъ чрезъ однѣ и тѣ же двѣ точки. Точно такъ же

$$k + \lambda k' + \mu k'' + \nu k''' = 0 \qquad (5)$$

есть уравненіе сѣти сферъ. Въ частномъ случаѣ сферы k, k', k'', k''' могутъ имѣть общую точку; въ такомъ случаѣ черезъ эту точку проходятъ всѣ сферы сѣти. Если, наконецъ, мы возьмемъ пятое выраженіе k'''' и параметръ ϱ, то мы получимъ уравненіе

$$k + \lambda k' + \mu k'' + \nu k''' + \varrho k'''' = 0,$$

въ которомъ содержится любая сфера.

5. Сфера представляетъ собой частный случай поверхностей 2-го порядка; общее уравненіе 2-ой степени $F(x, y, z) = 0$ содержитъ 10 членовъ

$$x^2,\ y^2,\ z^2,\ yz,\ zx,\ xy,\ x,\ y,\ z,\ 1, \qquad (6)$$

умноженныхъ каждый на нѣкоторый коэффиціентъ. Эти коэффиціенты можно опредѣлить изъ линейныхъ уравненій такимъ образомъ, чтобы поверхность проходила черезъ 9 данныхъ точекъ. И если только эти точки не имѣютъ особаго расположенія, то коэффиціенты опредѣляются однозначно.

6. Если уравненіе $F(x, y, z) = 0$ содержитъ только члены x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy, то оно называется однороднымъ. Если это уравненіе удовлетворяется для какой-нибудь точки x, y, z, то равенство сохранится, если мы замѣнимъ x, y, z черезъ hx, hy, hz, каково бы ни было значеніе h. Иными словами, оно остается справедливымъ для всѣхъ точекъ прямой, проходящей черезъ начало координатъ и черезъ точку x, y, z; это значитъ, что прямая на всемъ своемъ протяженіи лежитъ на поверхности. Это — коническая поверхность.

7. Здѣсь мы вынуждены ограничиться тѣмъ, что приведемъ только нормальныя формы остальныхъ уравненій второй степени, къ которымъ мы приходимъ, когда даемъ системѣ координатъ особое положеніе.

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Эллипсоидъ.

Поверхность разсѣкается координатными плоскостями на 8 конгруэнтныхъ и симметричныхъ частей. Начало есть центръ поверхности, т. е. каждая, проходящая черезъ него хорда дѣлится въ немъ пополамъ.

Координатныя оси называются главными осями, а координатныя плоскости — главными плоскостями поверхности.

Каждая изъ главныхъ плоскостей пересѣкаетъ поверхность по эллипсу; главныя полуоси этихъ эллипсовъ суть: b, c; c, a; a, b.

Отрѣзки a, b, c называются полуосями поверхности ($2a$, $2b$, $2c$ осями).

2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Однополый гиперболоидъ.

Поверхность разсѣкается плоскостями $x = 0$, $y = 0$ по гиперболамъ, а плоскостью $z = 0$ по эллипсу.

3) $$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Двуполый гиперболоидъ.

Поверхность разсѣкается плоскостями $x = 0$, $y = 0$ по гиперболамъ, плоскость же $z = 0$ вовсе ея не пересѣкаетъ. Эти 3 поверхности представляютъ собой центральныя поверхности второго порядка.

Какъ на частные случаи, которые особенно пригодны для того, чтобы составить себѣ наглядное представленіе объ этихъ плоскостяхъ, мы укажемъ на поверхности вращенія, отвѣчающія случаю $a = b$; отличають 2 рода эллипсоидовъ вращенія: одинъ — сжатый эллипсоидъ вращенія — получается вращеніемъ эллипса вокругъ малой оси, другой — удлиненный получается вращеніемъ эллипса вокругъ большой оси. Два гиперболоида вращенія получаются путемъ вращенія гиперболы вокругъ каждой изъ двухъ ея осей. Первый есть односвязная поверхность, имѣющая видъ чаши, а другая состоитъ изъ 2-хъ раздѣльныхъ чашеобразныхъ частей.

Чтобы составить себѣ ясное представленіе объ этихъ поверхностяхъ, очень полезно посмотрѣть ихъ модели.

8. Кромѣ этихъ центральныхъ поверхностей есть еще два вида поверхностей, не имѣющихъ центра; уравненія послѣднихъ могутъ быть приведены къ слѣдующимъ двумъ видамъ:

4) $$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

первый или эллиптическій параболоидъ;

5) $$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$

второй или косой (гиперболическій) параболоидъ.

Первая поверхность переходитъ въ поверхность вращенія, когда $a = b$; она получается вращеніемъ параболы вокругъ ея оси и имѣетъ чашеобразную форму.

Среди поверхностей второго рода нѣтъ поверхностей вращенія.

9. Поверхность 5) есть линейчатая поверхность; это значитъ, что она можетъ быть образована движеніемъ прямой линіи и при томъ двумя способами. Въ самомъ дѣлѣ, если мы напишемъ ея уравненіе въ видѣ

$$\frac{z}{c} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \tag{7}$$

и положимъ:

$$\frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} = \lambda, \quad \frac{z}{c} = \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \tag{8}$$

гдѣ λ есть произвольный параметръ, то уравненіе (7) удовлетворится тождественно.

Но каждое изъ уравненій (8), при постоянномъ λ, представляетъ плоскость; совмѣстно же они выражаютъ прямую пересѣченія этихъ плоскостей, при чемъ каждая изъ этихъ прямыхъ лежитъ на всемъ своемъ протяженіи на поверхности.

Вторая система прямыхъ, лежащихъ на поверхности, можетъ быть выражена уравненіями

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda, \quad \frac{z}{c}=\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right). \tag{9}$$

Точно такъ же однополый гиперболоидъ 2) можетъ быть образованъ прямыми линіями и также двумя способами; въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ:

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right), \quad \lambda\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right), \tag{10}$$

или

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right), \quad \lambda\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right), \tag{11}$$

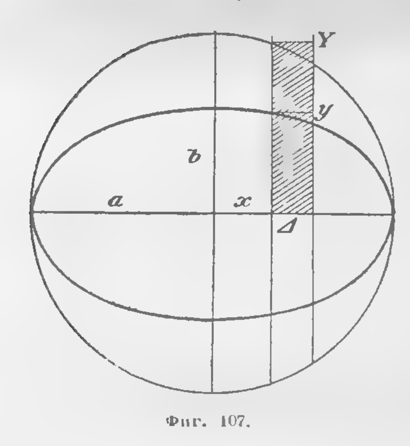
то уравненіе гиперболоида удовлетворяется при любомъ значеніи параметра λ.

Если мы въ этихъ уравненіяхъ замѣстимъ перемѣнныя x, y другъ другомъ, то мы получимъ **новое выраженіе** той же системы прямыхъ, но не получимъ новыхъ прямыхъ.

§ 103. Площадь эллипса и объемъ эллипсоида.

1. Положимъ, что намъ заданъ эллипсъ своимъ уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$



Фиг. 107.

Вокругъ этого эллипса мы опишемъ окружность радіуса a, уравненіе которой имѣетъ видъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

гдѣ Y есть ордината окружности. Построимъ при абсциссѣ x два прямоугольника съ общимъ основаніемъ Δ и съ высотами y, Y; въ такомъ случаѣ, площади этихъ прямоугольниковъ относятся, какъ $y : Y$.

Но изъ уравненій (1) и (2) слѣдуетъ:

$$y : Y = b : a,$$

и, слѣдовательно, отношеніе этихъ прямоугольниковъ не зависитъ отъ x.

Если мы поэтому раздѣлимъ эллипсъ и кругъ на безчисленное множество такого рода прямоугольниковъ, то окажется, что площадь эллипса

относится къ площади круга, какъ $b:a$; но площадь этого круга равна πa^2; слѣдовательно, площадь эллипса равна

$$\pi a b. \qquad (3)$$

2. Теперь уже намъ не трудно при помощи принципа Кавальери найти объемъ эллипсоида, уравненіе котораго мы возьмемъ въ формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (4)$$

Если мы разсѣчемъ эту поверхность плоскостью, параллельной плоскости yz-овъ такъ, что x будетъ имѣть на этой плоскости постоянное значеніе, то сѣченіе представляетъ собой эллипсъ, уравненіе котораго въ плоской системѣ координатъ y, z имѣетъ видъ

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = 1. \qquad (5)$$

Чтобы получить площадь этого эллипса, намъ нужно только въ выраженіи (3) замѣнить a, b черезъ

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Мы получимъ, слѣдовательно, площадь

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

которая представляетъ собой функцію второй степени отъ x. Такъ какъ высота тѣла, между двумя значеніями $x = \pm a$, равна $2a$, то, полагая въ формулѣ (13) § 90-го

$$h = 2a, \quad \Delta_1 = \Delta_2 = 0, \quad \Delta_{,,,} = \pi bc,$$

мы получимъ:

$$\text{объемъ эллипсоида} = \frac{4\pi abc}{3}.$$

При $a = b = c$ это выраженіе даетъ объемъ шара.

Алфавитный указатель

къ II тому.

Римскія цифры обозначаютъ выпускъ, арабскія – страницу.


MATHESIS

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ“.

ПЕРРИ, ДЖ. проф. **Вращающійся волчокъ** *). Публичная лекція. Пер. съ англ. VIII+95 стр. 8°. Съ 63 рис. 2-е изд. 1908. Ц. 60 к.

Книжка, воочію показывающая, какъ люди истиннаго знанія, не цеховой только науки, умѣютъ распоряжаться научнымъ матеріаломъ при его популяризаціи. *Русская Школа.* *С. Шохоръ-Троцкій.*

ШЕЙДЪ, К. Химическіе опыты для юношества. Перев. съ нѣмецк. подъ ред. лаборанта *Е. С. Ельчанинова.* II+192 стран. 8°. Съ 79 рисунками. 1907. Ц. Р. 1. 20 к.

Превосходная книга, какой намъ давно не хватало. Всюду въ книгѣ сохраняешь благотворное чувство, что находишься въ совершенно надежныхъ рукахъ... учитъ серьезной наукѣ въ болѣе легкой формѣ.

Zeitschrift für Lehrmittelwesen und pädagogische Literatur.

ВИХЕРТЪ, Э. проф. **Введеніе въ геодезію** *). Перев. съ нѣмецк. 80 стр. 16°. Съ 14 рисунк. 1907. Ц. 35 к.

Излагаетъ основы низшей геодезіи, имѣя въ виду пользованіе ею въ школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ШМИДЪ, Б. проф. **Философская хрестоматія** *). Пер. съ нѣм. *Ю. А. Говсѣева* подъ ред. и съ пред. проф. *Н. Н. Ланге.* VI+171 стр. 8°. 1907. Ц. Р. 1. —

... Для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она (книга) даетъ разнообразный и интересный матеріалъ. *Вопросы философіи и психологіи.*

ТРОМГОЛЬТЪ, С. Игры со спичками. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. 1907. Ц. 50 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. **Современное развитіе физики** *). Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга* и *А. Р. Орбинскаго.* Съ приложеніемъ рѣчи *А. Бальфура*: **Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества.** VIII+319 стран. 8°. Съ 5 портрет., 6 таблиц. и 33 рисунк. Ц. Р. 2. —

Старается представить въ стройной и глубокой системѣ всѣ явленія физическаго опыта и рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія. *Современный Міръ.*

УШИНСКІЙ, Н. проф. **Лекціи по бактеріологіи.** VIII+135 стр. 8°. Съ 34 черными и цвѣтными рисунками. 1908. Ц. Р. 1. 50 к.

РИГИ, А. проф. **Современная теорія физическихъ явленій** *) (іоны, электроны, радіоактивность). Пер. съ 3 итальянск. изданія. VIII+146 стр. 8°. Съ 21 рис. 1910. *Второе изданіе.* Ц. 90 к.

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному человѣку, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педагогическій Сборникъ.*

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній** *). 46 стран. 8°. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи. *Педагогическій Сборникъ.*

ЛАКУРЪ, П. и **АППЕЛЬ, Я. Историческая физика** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физики и Элементарн. Матем.“* Въ 2-хъ том. большого формата, 875 стр. Съ 799 рис. и 6 отдѣльными табл. 1908. Ц. Р. 7. 50 к.

„Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ“...

Проф. О. Хвольсонъ. *Ж. М. Н. Пр.*

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ".

АРРЕНІУСЪ, СВ. проф. **Образованіе міровъ** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* 208 стр. 8°. Съ 60 рис. 1908. Ц. Р. 1.75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ. *Педагог. Сборн.*

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.** Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8°. Съ 11 чертеж. 1908. Ц. 35 к.

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16°. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно. *Русская Школа.*

РИГИ, А. проф. **Электрическая природа матеріи** *). Вступительная лекція. Пер. съ итальянскаго. 28 стр. 8°. 1908. Ц. 30 к.

Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненій знаменитаго профессора Болоньскаго университета. *Ж. М. Н. Пр.* Проф. О. Хвольсонъ.

ЛЕМАНЪ, О. проф. **Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.** Пер. съ нѣмецк. *П. В. Казанецкаго.* IV+43 стр. 8°. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.

ГЕЙБЕРГЪ, І. проф. **Новое сочиненіе Архимеда***). Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8°. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.

Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованіе.*

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. прив.-доц. **Снѣгъ, иней, градъ, ледъ и ледники** *) IV+127 стр. 8°. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. Р. 1

Mathesis можетъ гордиться этимъ изданіемъ.
Ж. М. Н. Пр. Проф. О. Хвольсонъ.

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ** *). Перев. съ нѣмецкаго подъ редакц. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. 1909. Ц. Р. 1.

Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ... *Русская Школа.*

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. **Добываніе свѣта** *). Общедоступная лекція для рабочихъ, прочит. на собраніи Британск. Ассоціаціи 1906. Перев. съ англ. VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.

Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта.
Ж. М. Н. Пр. Проф. О. Хвольсонъ

СЛАБИ, А, проф. **Резонансъ и затуханіе электрическихъ волнъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опыт. Физ. и Элемент. Матем."*. 42 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

СНАЙДЕРЪ, проф. **Картина міра въ свѣтѣ современнаго естествознанія.** Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8°. Съ 16 отд. портретами. 1909. Ц. Р. 1. 50 к.

Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. *Педагог. Сборникъ.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Благородные и радіоактивные газы.** Пер. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат."* 37 стр. 16°. Съ 16 рис. 1909. Ц 25 к.

БРУНИ, К. проф. **Твердые растворы.** Пер. съ итал. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат."* 37 стр. 16°. 1909. Ц. 25 к.

БОЛЛЪ, Р. С. проф. **Вѣка и приливы.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* 104 стр. 8°. Съ 4 рис. и 1 табл. 1909. Ц. 75 к.